UNTERSUCHUNG EINIGER CURVEN,

WELCHE DURCH

ROLLEN VON KEGELSCHNITTEN

ERZEUGT WERDEN.

INAUGURAL-DISSERTATION,

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI

HOCHLÖBLICHER PHILOSOPHISCHER FACULTÄT
ZU MARBURG

EINGEREICHT

VON

EDUARD HARTMANN

AUS MARBURG,

ORD. LEHRER AN DER HÖHEREN BÜRGERSCHULE ZU CASSEL.

MIT ZWEI FIGURENTAFELN.

MARBURG 1876.

UNTERSUCHUNG EINIGER CURVEN,

WELCHE DURCH

ROLLEN VON KEGELSCHNITTEN

ERZEUGT WERDEN.

INAUGURAL-DISSERTATION,

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI

HOCHLÖBLICHER PHILOSOPHISCHER FACULTÄT
ZU MARBURG

EINGEREICHT

VON

EDUARD HARTMANN

AUS MARBURG,

ORD. LEHRER AN DER HÖHEREN BÜRGERSCHULE ZU CASSEL.

MIT ZWEI FIGURENTAFELN.

MARBURG 1876.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0055

MEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER,

HERRN FRIEDRICH LUDWIG STEGMANN,

DOCTOR DER PHILOSOPHIE UND MEDICIN, ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK

AN DER UNIVERSITÄT ZU MARBURG,

IN

DANKBARKEIT UND LIEBE

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

Einleitung.

Rollcurve heisst eine solche Curve, welche ein mit der Curve $F(u,\vartheta)=0$ festverbundener Punkt K bei dem Rollen derselben an einer festliegenden Grundcurve $\Phi(\xi,\eta)$ beschreibt. Ihre Gleichung sei $f(x,y)=0$.

Als bekannt*) möge vorausgesetzt werden, dass, wenn man die Polargleichung $F(u,\vartheta)=0$ der rollenden Curve auf den Pol K bezieht, zwischen den genannten Linien die Beziehungen stattfinden

$$(1)\qquad y-\eta=\frac{u}{\sqrt{1+p^2}},\quad (2)\quad x-\xi=\frac{-up}{\sqrt{1+p^2}},\quad (3)\quad \frac{u'}{u}=\frac{p-\eta'}{1+p\eta'},$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{du}{d\vartheta}=u',\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\eta'$$

gesetzt worden ist.

Es soll nun allgemein die Gleichung $\Phi(\xi,\eta)=0$ der Curve bestimmt werden, an welcher eine Kegelschnittlinie rollen muss, damit ein Brennpunkt derselben sich in einer geraden Linie fortbewege.

Wir nehmen die Gleichung des Kegelschnitts an unter der Form:

$$(4)\qquad u=\frac{\frac{m}{2}}{1+e\cos\vartheta},$$

indem aus derselben hervorgehen:

für $\frac{m}{2}=\frac{b^2}{a}$, $a^2e^2=a^2-b^2$: die Gl. der Ellipse;

für $\frac{m}{2}=\frac{b^2}{a}$, $a^2e^2=a^2+b^2$: die Gl. der Hyperbel;

für $e^2=1$: die Gl. der Parabel.

Aus (4) leiten wir ab

$$u'=\frac{-\frac{m}{2}e\sin\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2},\quad \text{daher}$$

$$(3,)\qquad \frac{u'}{u}=\frac{-e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta}.$$

*) Vergl. Schlömilch, Uebungsbuch z. St. d. h. Anal. Th. II, §. 43. Allg. Form. u. später ebenda Beispiel 9.

Denken wir uns die ursprüngliche Lage des Kegelschnitts so, dass der Scheitel im Anfangspunkt A liegt und die Abscissenaxe Tangente an die Curve ist und bezeichnen wir mit λ den Abstand des (nächsten) Brennpunktes vom Scheitel, so ist der Bedingung unserer Aufgabe entsprechend die Gleichung der Brennpunktslinie

(5) $$f(x,y) = y - \lambda = 0;\ \text{daher}$$

$$p = 0;\ \text{also}$$

(3„) $$\frac{u'}{u} = -\eta'.\quad \text{Aus } (3_{,}) \text{ und } (3_{„}) \text{ folgt}$$

(6) $$\eta' = \frac{e \sin\vartheta}{1 + e\cos\vartheta},\ \text{während wir haben}$$

(1,) $$\lambda - \eta = \frac{\frac{m}{2}}{1 + e\cos\vartheta}.$$

Aus (1,) und (6) eliminiren wir ϑ auf folgende Weise:

Aus (1,) folgt: $1 + e\cos\vartheta = \dfrac{\frac{m}{2}}{\lambda - \eta}$;

dies in (6) eingesetzt liefert

$$\eta' = \frac{e(\lambda-\eta)\sin\vartheta}{\frac{m}{2}};\ \text{daher}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\frac{m}{2}\eta'}{e(\lambda-\eta)},\quad \cos\vartheta = \frac{\pm\sqrt{e^2(\lambda-\eta)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\eta'^2}}{e(\lambda-\eta)},$$

$$1 + e\cos\vartheta = \frac{(\lambda-\eta) \pm \sqrt{e^2(\lambda-\eta)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\eta'^2}}{\lambda-\eta},$$

daher wird (1,) zu

$$\lambda - \eta = \frac{\frac{m}{2}(\lambda-\eta)}{(\lambda-\eta) \pm \sqrt{e^2(\lambda-\eta)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\eta'^2}};\ \text{hieraus}$$

$$\left[\frac{m}{2}(\lambda-\eta)\right]^2 = e^2(\lambda-\eta)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\eta'^2,$$

$$1 + \eta'^2 = \frac{(\lambda-\eta)^2(e^2-1) + 2(\lambda-\eta)\frac{m}{2}}{\left(\frac{m}{2}\right)^2},$$

(7) $$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\pm\sqrt{(\lambda-\eta)^2(e^2-1) + 2(\lambda-\eta)\frac{m}{2} - \left(\frac{m}{2}\right)^2}}{\frac{m}{2}},$$

(8)
$$\pm \frac{m}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\lambda-\eta)^2(e^2-1)+2(\lambda-\eta)\frac{m}{2}-\left(\frac{m}{2}\right)^2}} = \xi + const.$$

Die Ausführung der angezeigten Integration nach Einsetzung der speciellen Werthe von $\frac{m}{2}$, e und λ wird die Gleichungen der Grundcurven für eine jede der Kegelschnittarten ergeben.

Wir werden es uns daher im Folgenden zur Aufgabe machen, die Grundcurven für die drei Kegelschnittarten zu bestimmen und hierauf Untersuchungen über einige Rollcurven folgen lassen, welche gegebene, mit dem Kegelschnitt festverbundene Punkte bei der durch die gefundene Grundcurve vorgeschriebenen Bewegung desselben beschreiben müssen.

I. Kapitel.

Bestimmung der Grundcurven.

§. 1. Ellipse.

Die Gleichungen (4) und (8) der Einleitung gehen durch Einsetzung von
$$\frac{m}{2} = \frac{b^2}{a},\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \text{ und } \lambda = a - c \text{ über in}$$

(1) $$u = \frac{b^2}{a + c\cos\vartheta},$$ die bekannte Polargleichung der Ellipse, und

(2) $$\pm b \int \frac{d\eta}{\sqrt{c^2-(c+\eta)^2}} = \xi + const.$$

Die in (2) angezeigte Integration liefert

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \pm b\ Arc\ sin\ \frac{\eta+c}{c} + const \\ o &= \pm b\ Arc\ sin\ \ 1\ \ + const \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}\eta \text{ und } \xi \\ \text{gleichzeitig} = o.\end{matrix}$$

$$\xi = \pm b\left(Arc\ sin\ \frac{\eta+c}{c} - Arc\ sin\ 1\right),$$

$$\xi = \pm b\ \ Arc\ cos\ \frac{\eta+c}{c} \text{ und endlich}$$

$$\eta = -c\left[1 - cos\left(\pm\frac{\xi}{b}\right)\right].$$

Da $cos\left(+\frac{\xi}{b}\right) = cos\left(-\frac{\xi}{b}\right)$, so folgt, dass die Curve durch die Ordinatenaxe in zwei symmetrische Theile zerlegt wird und wir unter der Bedingung, dem ξ auch negative Werthe zu ertheilen, schreiben dürfen

(3) $$\eta = -c\left[1 - cos\frac{\xi}{b}\right].$$

Dies ist die Gleichung der Grundcurve der Ellipse. Sie zeigt, dass η stets negativ ist, die Curve daher gänzlich unterhalb der angenommenen Abscissenaxe liegt.

Zur Untersuchung ihrer weiteren Eigenschaften lassen sich ohne Mühe zusammenstellen:

$$\xi = o,\ 2\pi b, \ldots 2n\pi b;\ \eta = o;$$

$$\xi = \frac{\pi}{2} b, \frac{3\pi}{2} b, \ldots \frac{(2n+1)\pi}{2} b;\ \eta = -c;$$

$$\xi = \pi b,\ 3\pi b, \ldots (2n+1)\pi b;\ \eta = -2c.$$

Ferner ist $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{c}{b} sin \frac{\xi}{b}$; Die Bedingung $\frac{d\eta}{d\xi} = o$ liefert $\xi = n\pi b$;

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{c}{b^2} cos \frac{\xi}{b};\ \text{daher}$$

$$\left.\begin{array}{l}\xi = o \\ = 2\pi b \\ \vdots \\ = 2n\pi b\end{array}\right\} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{c}{b^2}; \qquad \left.\begin{array}{l}\xi = \pi b \\ = 3\pi b \\ \vdots \\ = (2n+1)\pi b\end{array}\right\} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = +\frac{c}{b^2};$$

folglich sind alle Punkte

$$\left.\begin{array}{l}\xi = 2n\pi b \\ \eta = o\end{array}\right\} \text{Maxima;} \qquad \left.\begin{array}{l}\xi = (2n+1)\pi b \\ \eta = -2c\end{array}\right\} \text{Minima.}$$

Die Bedingung $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = o$ liefert $\xi = \frac{(2n+1)\pi}{2} b$; daher sind alle Punkte

$$\left.\begin{array}{l}\xi = \frac{(2n+1)\pi}{2} b \\ \eta = -c\end{array}\right\} \text{Wendungspunkte.}$$

Es ist in Uebereinstimmung hiermit

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \text{ negativ für } \xi = o \text{ bis } \xi = \frac{\pi}{2} b \\ \qquad\qquad \xi = \frac{3\pi}{2} b \text{ bis } \xi = \frac{5\pi}{2} b \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Curve} \\ \text{concav;}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \text{ positiv für } \xi = \frac{\pi}{2} b \text{ bis } \xi = \frac{3\pi}{2} b \\ \qquad\qquad \xi = \frac{5\pi}{2} b \text{ bis } \xi = \frac{7\pi}{2} b \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Curve} \\ \text{convex.}\end{array}$$

Endlich ist in den Wendungspunkten $\xi = \frac{\pi}{2} b, \frac{5\pi}{2} b, \ldots; \frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\tau = -\frac{c}{b}$;

„ „ „ $\xi = \frac{3\pi}{2} b, \frac{7\pi}{2} b, \ldots; \frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\tau = +\frac{c}{b}$.

Nach diesen Angaben ist es leicht, sich ein vollständiges Bild von dem Verlauf dieser Linie zu entwerfen.

§. 2. Hyperbel.

Um die vollständige Hyperbel auszudrücken, sind die 2 Gleichungen

(1a) $$u = \frac{\frac{m}{2}}{1 + e\cos\vartheta} = \frac{b^2}{a + c\cos\vartheta},$$

(1b) $$u = \frac{-\frac{m}{2}}{1 - e\cos\vartheta} = \frac{-b^2}{a - c\cos\vartheta}$$ erforderlich, von denen die erste den ersten, die zweite den zweiten Zweig der Curve repräsentirt, wenn die Winkel ϑ von A gegen M bis zur Asymptotengrenze $\vartheta = Arc\,tg\left(-\frac{b}{a}\right)$ positiv, gegen m bis $\vartheta = Arc\,tg\left(-\frac{b}{a}\right)$ negativ für den ersten Zweig, für den zweiten von A' gegen M' bis $\vartheta = Arc\,tg\left(+\frac{b}{a}\right)$ positiv, gegen m' bis $\vartheta = Arc\,tg\left(+\frac{b}{a}\right)$ negativ gezählt werden. Da wir nun hier nur den einen Zweig der Hyperbel rollen lassen, so genügt uns die erste Gleichung, die wir aus (4) der Einleitung durch die Substitutionen $\frac{m}{2} = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ erhalten. Fig. 4.

Substituiren wir nun diese Werthe und noch $\lambda = c - a$ in (8) der Einleitung, so folgt

(2) $$\mp b \int \frac{d\eta}{\sqrt{(c-\eta)^2 - c^2}} = \xi + const.$$

Die Ausführung der angezeigten Integration ergibt

$$\left.\begin{aligned} \mp b\, l\left[(c-\eta) + \sqrt{(c-\eta)^2 - c^2}\right] &= \xi + const \\ \mp b\, l[c] &= o + const \end{aligned}\right\} \eta \text{ und } \xi \text{ gleichzeitig} = o.$$

daher

$$\mp b\, l\frac{(c-\eta) + \sqrt{(c-\eta)^2 - c^2}}{c} = \xi,$$

$$(c-\eta) + \sqrt{(c-\eta)^2 - c^2} = c\, e^{\mp\frac{\xi}{b}}$$

$$(c-\eta)^2 - c^2 = \left[c\, e^{\mp\frac{\xi}{b}} - (c-\eta)\right]^2; \text{ hieraus}$$

$$c - \eta = \frac{c}{2}\left(e^{\pm\frac{\xi}{b}} + e^{\mp\frac{\xi}{b}}\right) \text{ und endlich}$$

(3) $$c - \eta = \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}\right).$$

Dies ist die Gleichung der Grundcurve der Hyperbel. Sie nimmt auch folgende Gestalt an, wenn man beiderseits mit c dividirt und mit b multiplicirt:

$$b - \frac{b}{c}\eta = \frac{b}{2}\left(e^{+\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}\right).$$

Nun ist $\frac{b}{2}\left(e^{+\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}\right)$ die Ordinate der Kettenlinie vom Parameter b, deren Scheitel die Ordinate b besitzt, folglich

$$\frac{b}{2}\left(e^{+\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}\right) - b$$

ihre Ordinate, wenn der Scheitel im Anfangspunkt liegt. Bezeichnen wir diesen letzteren Ausdruck mit $K(b)$, so nimmt unsere Gleichung die Form an:

(4) $$\eta = -\frac{c}{b}\left[\frac{b}{2}(e^{+\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}) - b\right] = -\frac{c}{b}K(b).$$

Die Gleichung ergibt für positive und negative Werthe von ξ gleiche Ordinaten und lehrt daher, dass die Curve gegen die Ordinatenaxe symmetrisch ist; sie zeigt ferner, dass, da η stets negativ sein muss, die Curve ihren Verlauf völlig unterhalb der angenommenen Abscissenaxe nimmt.

Wir haben

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{c}{b}\frac{dK(b)}{d\xi} = -\frac{c}{2b}(e^{+\frac{\xi}{b}} - e^{-\frac{\xi}{b}}),$$

daher für $\xi = o, \frac{d\eta}{d\xi} = o$. Die Abscissenaxe ist also Tangente in diesem Punkt.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{c}{b}\frac{d^2K(b)}{d\xi^2} = -\frac{c}{2b^2}(e^{+\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}});$$

letzterer Ausdruck ist negativ für jeden Werth von ξ und lässt schliessen, dass die Curve stets concav gegen unten ist.

Die Curve kann nun auf folgende Weise construirt werden. Man zeichne, indem man AX zur Horizontallinie, A zum Scheitel und AY, die negative ηaxe, zur Axe wählt, eine Kettenlinie, deren Constante gleich der zweiten Axe der Hyperbel $(= b)$ ist. Bestimmt man hierauf zu c, b und einer Ordinate PM' die 4te Proportionale und trägt dieselbe auf PM' von P aus ab, so ist M ein Punkt unserer Curve.

Fig. 2.

Da η der Gl. (4) zufolge seinem absoluten Werth nach grösser ist, als $K(b)$, so muss M unterhalb M' liegen und die Curve sich also mit rascherem Fall nach unten wenden, als die Kettenlinie.

Auf die angegebene Weise kann man ohne grosse Mühe eine hinreichende Anzahl von Punkten bestimmen, um sich ein klares Bild der Linie entwerfen und dieselbe zeichnen zu können.

Zur Construction der Kettenlinie dient eine nach der Gleichung dieser Linie berechnete Tabelle zusammengehöriger Coordinatenwerthe, wie sie z. B. Eytelwein*) gibt. Ich setze aus der angezogenen Tabelle so viele Werthe hierher, als voll ständig hinreichen, die Figur zu construiren. Die Zahlen beziehen sich auf die Einheit b.

---

*) Eytelwein, Theorie derjenigen krummen Linien, welche vorzügl. bei statischen Unters. vorkommen. Berlin 1808. Abschn. VI.

ξ	$K(b)$	ξ	$K(b)$
0,000	0,000	1,000	0,543
0,100	0,005	1,250	0,888
0,200	0,020	1,500	1,352
0,300	0,045	1,616	1,616
0,400	0,081	1,750	1,964
0,500	0,128	2,000	2,762
0,600	0,185	2,250	3,797
0,700	0,255	2,500	5,132
0,800	0,337	2,750	6,853
0,900	0,433	3,000	9,068

§. 3. Parabel.

Für den 3ten Fall, die gemeine Parabel, setzen wir in Gl. (4) der Einleitung $e^2 = 1$ und bekommen somit

$$u = \frac{\frac{m}{2}}{1 + \cos\vartheta}, \tag{1}$$

die bekannte Polargleichung für die Parabel, während andererseits durch diese Substitution und noch die: $\lambda = \frac{m}{4}$ Gl. (8) übergeht in

$$\pm\frac{m}{2}\int \frac{d\eta}{\sqrt{m\left(\frac{m}{4}-\eta\right)-\left(\frac{m}{2}\right)^2}} = \xi + const;\ \text{daher}$$

$$\pm\frac{\sqrt{m}}{2}\int \frac{d\eta}{\sqrt{-\eta}} = \xi + const; \tag{2}$$

die Ausführung der angezeigten Integration ergibt

$$\left.\begin{aligned} \mp\sqrt{m}\sqrt{-\eta} &= \xi + const \\ o &= const \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \xi \text{ und } \eta \\ \text{gleichzeitig} = o. \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \mp\sqrt{-m\eta} &= \xi, \\ -m\eta &= \xi^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Die gesuchte Grundcurve ist mithin eine der gegebenen congruente Parabel, deren Scheitel mit dem der ersteren in ihrer anfänglichen Lage zusammenfällt und deren Axe in der negativen Yaxe liegt. Man kann diesem Ergebniss auch die Form des Lehrsatzes geben:

Rollt man an einer festliegenden Parabel eine ihr congruente so ab, dass die Scheitel einmal zusammenfallen, so durchlauft der Brennpunkt der rollenden Parabel die Directrix der festen.

II. Kapitel.

Rollcurven.

A. Ellipse.

§. 1.

Die Bewegung der Ellipse an ihrer Grundcurve.

Zunächst folgt aus Gl. (2) der Einleitung und dies, wie hier gleich bemerkt werden möge, für alle drei Kegelschnittarten, da

(1) $$p = o, \qquad x = \xi.$$

d. h.: fällt man von dem Berührungspunkt des Kegelschnitts mit seiner Grundcurve auf die Abscissenaxe ein Perpendikel und verlängert dasselbe bis zum Durchschnitt mit der Brennpunktslinie, so ist dieser Punkt B der Brennpunkt des Kegelschnitts in seiner derzeitigen Lage.

Aus Gl. (6) der Einleitung ergibt sich

$$\eta' = \frac{c \sin \vartheta}{a + c \cos \vartheta},$$

und aus der Entwickelung I, §. 1 entnehmen wir

$$\eta' = -\frac{c}{b} \sin \frac{\xi}{b}.$$

Wir leiten daher ab

(2) $$\frac{\sin \vartheta}{a + c \cos \vartheta} = -\frac{\sin \frac{\xi}{b}}{b}.$$

Nach dieser Gleichung lassen sich nun folgende Werthe zusammenstellen:

$$\xi = o, \qquad \sin \vartheta = o, \qquad \vartheta = o;$$

$$\xi = \frac{\pi}{2} b, \qquad a \cos \vartheta + c = o, \qquad \vartheta = Arc \cos \left(-\frac{c}{a}\right);$$

$$\xi = \pi b, \qquad \sin \vartheta = o, \qquad \vartheta = \pi;$$

$$\xi = \frac{3\pi}{2} b, \qquad a \cos \vartheta + c = o, \qquad \vartheta = 2\pi - Arc \cos \left(-\frac{c}{a}\right);$$

$$\xi = 2\pi b, \qquad \sin \vartheta = o, \qquad \vartheta = 2\pi.$$

Die Ellipse rollt demnach in den gegebenen Intervallen von ξ je den vierten Theil ihres Umfangs ab, so dass, wenn $\xi = 2\pi b$ geworden ist, sie sich gerade einmal herumgedreht hat. Man könnte diese Tabelle vervollständigen, so dass sich aus ihr die Beziehung zwischen der Umdrehung der Ellipse und der Entfernung des Brennpunktes vom Coordinatenanfangspunkt numerisch feststellen liesse. Mehr empfiehlt sich jedoch folgendes Verfahren.

Wir wollen uns denken, es rolle gleichzeitig mit der Ellipse ein Kreis vom Halbmesser b an der Brennpunktslinie so, dass sein tiefster Punkt sich stets in dem jedesmaligen Ort des Brennpunktes befindet. Man kann dies in der Praxis so ausführen, dass man die (etwa von Draht verfertigte) Kreislinie durch eine im Brennpunkt B der Ellipse angebrachte kleine Schlinge hindurchgehen, beide Curven ihre Bewegung gleichzeitig beginnen und so machen lässt, dass die Schlinge

stets auf der Brennpunktslinie bleibt. Da $AA' = 2\pi b$, so rollt sich der Kreis gleichzeitig mit der Ellipse einmal ab und erzeugt die Cycloide ADA'.

Ist nun M der Berührungspunkt der Ellipse mit ihrer Grundcurve, so ist B nach (1) der dieser Lage entsprechende Brennpunkt und $\measuredangle MBS = \vartheta$. Ist dann ferner der Kreis O der zugehörige Wälzungskreis, so ist

$$Arc\,AQ' = Arc\,BQ = b\varphi = AB = \xi, \text{ der Wälzungswinkel demnach}$$

(3) $$\varphi = \frac{\xi}{b}$$

und Q der dem Punkte M entsprechende Punkt der Cycloide.

Nun ist $BM = \frac{b^2}{a + c\cos\vartheta}$, also $\frac{\sin\vartheta}{a + c\cos\vartheta} = \frac{BM\sin\vartheta}{b^2}$, demnach

$$\frac{BM\sin\vartheta}{b^2} = -\frac{1}{b}\sin\varphi, \text{ also vom Zeichen abgesehen}$$

$$BM\sin\vartheta = b\sin\varphi.$$

Da nun $MJ = BM\sin\vartheta$, $TB = b\sin\varphi$ (wenn $QT \perp AA'$), so ist

$$\triangle VTB \cong \triangle BJM, \text{ daher } BV = BM.$$

Mit Hülfe dieser Bemerkungen lassen sich nun folgende Aufgaben lösen:

Zu einem gegebenen M oder B oder BM, oder ϑ oder φ die zugehörige Lage der Ellipse zu zeichnen.

Zuvörderst construire man über AA' nach bekannten Regeln die besprochene Cycloide ADA'. Wenn nun M oder B oder BM gegeben ist, so zeichne man BM, wodurch auch O bestimmt ist, beschreibe um O einen Kreis mit dem Halbmesser b, fälle vom Durchschnittspunkt Q desselben mit der Cycloide das Perpendikel QT und beschreibe schliesslich mit BM um B einen Kreis. Sein Durchschnitt mit QT sei V; dann ist VBS' die dem Punkt M entsprechende Lage der grossen Ellipsenaxe.

Ist ϑ gegeben, so bestimme man hierzu aus der Ellipse BM und verfahre wie eben gezeigt.

Zu einem gegebenen φ kann man Q und O ohne Mühe festsetzen und mit Hülfe dieser Punkte B finden, so dass auch in diesem Fall die Auflösung der Aufgabe auf die schon besprochene zurückgeführt wird.

Schliesslich wollen wir, da $\varphi = \frac{\xi}{b}$ ist, die Gl. der Grundcurve schreiben

(4) $$\eta = -c(1 - \cos\varphi),$$

so dass η jetzt von dem Wälzungswinkel der begleitenden Cycloide abhängig erscheint.

---

§. 2.

Allgemeine Entwickelung der Rollcurvengleichungen.

An dieser Bewegung der Ellipse nehmen natürlich sämmtliche Punkte in ihrem Umfang und Innern Theil und es dürfte nicht ohne Interesse sein, die Frage zu beantworten, welche Curve irgend ein Punkt der Ellipse bei dieser ihrer Umdrehung wird beschreiben müssen. Da nun alle Punkte in der Ellipse die ursprüngliche Lage der Axe SS' (oder die entsprechende Lage im nächsten Maximum der Grundcurve) durchschreiten müssen, so wollen wir unsere Betrachtung auf Punkte dieser Axe beschränken.

Wir setzen $SK = z$, $MJ = w$;

dann ist $\overline{MK}^2 = \overline{KJ}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{BJ}^2$;

nun ist $BM = BV + VM = (a - c) + c(1 - \cos\varphi) = a - c\cos\varphi$,

indem hier nur der absolute Werth von η in Rechnung zu ziehen ist; daher

$$\overline{MK}^2 = (z - a + w)^2 + (a - c\cos\varphi)^2 - (c - w)^2 = (z - a)^2 + 2(z - a)w + 2cw - c^2 + (a - c\cos\varphi)^2.$$

Wir haben ferner

$$2cw = a(MB' - MB),\ MB' = 2a - MB = a + c\cos\varphi,\ \text{also}$$

$$2cw = 2ac\cos\varphi \text{ und}$$

$$2(z - a)w = 2a(z - a)\cos\varphi.\ \text{Daher ist endlich}$$

$$\overline{MK}^2 = (z - a)^2 + 2a(z - a + c)\cos\varphi - c^2 + (a - c\cos\varphi)^2,$$

oder

$$\overline{MK}^2 = (z - a)^2 + b^2 + 2a(z - a)\cos\varphi + c^2\cos^2\varphi. \tag{1}$$

Denkt man sich nun um M mit MK einen Kreis beschrieben, so ist dessen Gleichung, indem ξ und η die Coordinaten des Mittelpunktes sind

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \overline{MK}^2.$$

Setzen wir

$$\xi = b\varphi,$$

$$\eta = -c(1 - \cos\varphi),$$

und für $\overline{MK}^2$ den Werth aus (1), so bekommen wir

$$(x - b\varphi)^2 + (y + c - c\cos\varphi)^2 = (z - a)^2 + b^2 + 2a(z - a)\cos\varphi + c^2\cos^2\varphi$$

und nach einigen unschweren Reductionen

$$(x - b\varphi)^2 + y^2 - z^2 + 2(az - b^2 + cy)(1 - \cos\varphi) = 0. \tag{2}$$

Die Durchschnitte aller auf einander folgenden Kreise Gl. (2) werden die Curve des Punktes K ergeben. Beim Fortschritt von einem Kreis Gl. (2) bis zum nächst benachbarten sind nun ξ und η, oder ist, da beide durch φ ersetzt sind, φ variabel, wir müssen folglich Gl. (2) in Bezug auf φ differentiiren. Die Ausführung der Rechnung versieht uns mit der Gleichung

$$-2(x - b\varphi)b\,d\varphi + 2(az - b^2 + cy)\sin\varphi\,d\varphi = 0, \tag{3}$$

aus welcher wir ableiten

$$x = b\varphi + \frac{az - b^2 + cy}{b}\sin\varphi. \tag{4}$$

(4) in (2) eingesetzt ergibt dann

$$\frac{az - b^2 + cy}{b^2}(1 - \cos^2\varphi) + y^2 - z^2 + 2(az - b^2 + cy)(1 - \cos\varphi) = 0,$$

d. h.

$$[(az - b^2 + cy)\cos\varphi + b^2]^2 = b^2y^2 - b^2z^2 + 2b^2(az - b^2 + cy) + (az - b^2 + cy)^2 + b^4$$
$$= (a^2y^2 + 2ay.cz + c^2z^2)$$

und hieraus

$$\cos\varphi = \frac{\pm(ay + cz) - b^2}{az - b^2 + cy};\ \text{daher} \tag{5}$$

$$\sin\varphi = \pm\frac{b\sqrt{z^2 - y^2 + 2(\pm a - c)(y \mp z)}}{az - b^2 + cy};\ \text{also} \tag{6}$$

$$\varphi = Arc\cos\frac{\pm(ay + cz) - b^2}{az - b^2 + cy}. \tag{7}$$

(6) und (7) in (4) eingesetzt geben schliesslich

$$(8) \qquad x = b\,Arc\cos\frac{\mp a y - b^2 \mp c z}{a z - b^2 + c y} \pm \sqrt{z^2 - y^2 + 2(\pm a - c)(y \mp z)}.$$

Dies ist die Gleichung der Rollcurve des Punktes K in ihrer allgemeinsten Form. Sie lässt sich aber, was bequemer erscheint, durch zwei Gleichungen ersetzen, in welchen x und y sich als Functionen von φ darstellen, und welche wir aus (5) und (4) ableiten wollen.

Aus (5) ergibt sich ganz einfach

$$(9)\begin{cases} y = \dfrac{(a\cos\varphi \mp c)z + b^2(1-\cos\varphi)}{\pm a - c\cos\varphi}, \text{ dies in (4) eingesetzt liefert} \\ x = b\left[\varphi + \dfrac{(\pm z \mp a + c)\sin\varphi}{\pm a - c\cos\varphi}\right]. \end{cases}$$

Es wird sich als zweckmässig erweisen, den Coordinatenanfangspunkt in den ersten Minimalpunkt der Grundcurve zu verlegen und es ist zu diesem Zweck in die Gl. (9) an Stelle von y, x und φ einzuführen

$$y - 2c, \quad x + b\pi, \quad \varphi + \pi.$$

Hiernach erhalten wir

$$y = \frac{(-a\cos\varphi \mp c)z + b^2(1+\cos\varphi) + 2c(\pm a + c\cos\varphi)}{\pm a + c\cos\varphi},$$

$$x = b\left[\varphi - \frac{(\pm z \mp a + c)\sin\varphi}{\pm a + c\cos\varphi}\right].$$

Gibt man dem φ sowohl das positive, wie das negative Zeichen, so erhält man für x zwei gleiche Werthe mit verschiedenen Vorzeichen, dagegen für y denselben Werth. Die Curve wird demnach, wie freilich nicht anders zu erwarten war, durch die angenommene Ordinatenaxe in zwei symmetrische Zweige zerlegt.

Nimmt man nun $\varphi = o$, so bekommt man

$$y = \pm(2a - z), \; x = o.$$

Die Natur der Sache lässt uns den zweiten Werth von y verwerfen; tilgen wir daher in (8) und (9) die (betreffenden) unteren Zeichen, so erhalten wir die Gleichungen in ihrer endgültigen, brauchbaren Gestalt

$$(8_1) \qquad x = b\,Arc\cos\frac{a y - b^2 + c z}{a z - b^2 + c y} \pm \sqrt{z^2 - y^2 - 2(a-c)(z-y)}.$$

$$(9_1)\begin{cases} y = \dfrac{b^2 + (2a - z)c + (a^2 + c^2 - a z)\cos\varphi}{a + c\cos\varphi}, \\ x = b\left[\varphi - \dfrac{(z - a + c)\sin\varphi}{a + c\cos\varphi}\right]. \end{cases}$$

Aus (9_1) leiten wir die Differentialgleichungen ab

$$dy = \frac{b^2(z - a + c)\sin\varphi}{(a + c\cos\varphi)^2}\,d\varphi,$$

$$dx = \frac{(a + c\cos\varphi)^2 - (a\cos\varphi + c)(z - a + c)}{(a + c\cos\varphi)^2}\,b\,d\varphi,$$

also

$$(10)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{b(z-a+c)\sin\varphi}{(a+c\cos\varphi)^2-(a\cos\varphi+c)(z-a+c)},$$

$$(11)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{(z-a+c)[(a-c\cos\varphi)\cos\varphi-(z-a-c)](a+c\cos\varphi)^3}{[(a+c\cos\varphi)^2-(a\cos\varphi+c)(z-a+c)]^3}.$$

---

§. 3.

Discussion der Gleichungen und besondere Fälle.

Für $z=a-c$ ist $\frac{dy}{dx}=o$, $\frac{d^2y}{dx^2}=o$ für jeden Werth von φ.

Setzt man aber als Bedingung $\frac{dy}{dx}=o$, so folgt

$$\sin\varphi=o,\quad \varphi=n\pi.$$

Sei nun zuerst $\varphi=2m\pi$ oder, um eine ganz bestimmte Stelle vor Augen zu haben, $\varphi=o$, so erhalten wir nach einigen leichten Reductionen aus (10) und (11)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{o}{(a+c)(2a-z)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{z-(a-c)}{(2a-z)^2}.$$

Ist hier $z=2a$, so wird $\frac{dy}{dx}=\frac{o}{o}$.

Von diesem Specialwerth abgesehen, haben wir für

$z>a-c$: $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, Curve convex;

$z<a-c$: $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, Curve concav.

Sei nun zweitens $\varphi=(2m+1)\pi$ oder speciell $\varphi=\pm\pi$, so ist

$$\frac{dy}{dx}=\frac{o}{(a-c)z},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{z-(a-c)}{z^2}.$$

Ist hier $z=o$, so wird $\frac{dy}{dx}=\frac{o}{o}$.

Von diesem Specialwerth abgesehen, haben wir für

$z>a-c$: $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, Curve concav;

$z<a-c$: $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, Curve convex.

Bestimmt man nun, um auf die Specialwerthe von z zurückzukommen, für $z=2a$ den wahren Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den zu $\varphi=2m\pi$ gehörenden Punkten nach bekannten Regeln, so erhält man

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\varphi=2m\pi}=\left[\frac{b(a+c)\cos\varphi}{(a^2-2c^2\cos\varphi-ac)\sin\varphi}\right]_{\varphi=2m\pi}=\infty.$$

Ebenso findet man für $z = o$ den wahren Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den zu $\varphi = (2m+1)\pi$ gehörenden Punkten

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\varphi=(2m+1)\pi} = \left[\frac{b(a-c)\cos\varphi}{(a^2+2c^2\cos\varphi+ac)\sin\varphi}\right]_{\varphi=(2m+1)\pi} = \infty.$$

Die Tangente steht daher in beiden Fällen zur Abscissenaxe senkrecht.

Fassen wir nun die letzten Resultate zusammen, so ergeben sich folgende Eigenschaften der Rollcurven:

1) Sämmtliche von Punkten zwischen S und A herrührende Curven erreichen für $\varphi = 2m\pi$ Maxima, für $\varphi = (2m+1)\pi$ Minima; unter ihnen nimmt eine Ausnahmsstellung ein die Curve für $z = o$ d. h. die Curve des ersten Scheitels, welche für $\varphi = (2m+1)\pi$ keine Minima im gewöhnlichen Sinn, sondern Rückkehrpunkte mit auf die Abscissenaxe senkrechter Richtung der Tangente bildet.
2) Sämmtliche von Punkten zwischen S' und A herrührende Curven erreichen für $\varphi = 2m\pi$ Minima, für $\varphi = (2m+1)\pi$ Maxima; unter ihnen nimmt eine Ausnahmsstellung ein die Curve für $z = 2a$ d. h. die Curve des zweiten Scheitels, welche für $\varphi = 2m\pi$ keine Minima im gewöhnlichen Sinn, sondern Rückkehrpunkte mit auf die Abscissenaxe senkrechter Richtung der Tangente bildet.
3) Die Grenze zwischen den beiden in (1) und (2) betrachteten Curvenscharen bildet die als gerade Linie erscheinende Curve des ersten Brennpunktes.

Wir wollen nun einzelne dieser Rollcurven näher betrachten und es bieten sich zunächst dar die Curven beider Scheitel, beider Brennpunkte und des Mittelpunktes. Da nun aber so noch ohne Voraussetzung einer bestimmten Ellipse die Untersuchung Ausdrücke von geringer Uebersichtlichkeit, ja sogar oft von der Art liefert, dass sie in allgemeiner Gestalt der Rechnung überhaupt ein Ziel setzen, so sollen alle unsere Ergebnisse sogleich auf eine bestimmte Ellipse angewendet werden. Wir haben hierzu eine Ellipse ausgewählt, deren grosse Axe doppelt so gross ist, als die kleine, für welche wir also haben: $a = 2b$. Fig. 7.

I. Erster Scheitel.

Die Untersuchung dieser Curve $A\alpha A'$ ist durch die einleitenden Bemerkungen dieses Paragraphen schon ziemlich erschöpft.

Die allgemeinen Gleichungen sehen für $z = o$ so aus:

$$y = \frac{b^2+2ac+(a^2+c^2)\cos\varphi}{a+c\cos\varphi}, \quad x = b\left[\varphi + \frac{(a-c)\sin\varphi}{a+c\cos\varphi}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b(a-c)\sin\varphi}{(a+c\cos\varphi)^2+(a-c)(a\cos\varphi+c)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(a-c)[(a-c\cos\varphi)\cos\varphi+(a+c)](a+c\cos\varphi)^3}{[(a+c\cos\varphi)^2+(a-c)(a\cos\varphi+c)]^3}.$$

Die Curve bietet ausser den erwähnten keine merkwürdigen Punkte und hat einige Aehnlichkeit mit der gemeinen Cycloide. Die Coordinaten des Maximums sind

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= 2a. \end{aligned}\right\} (a)$$

Aus $\frac{dy}{dx} = \infty$ d. h. $(a + c\cos\varphi)^2 + (a - c)(a\cos\varphi + c) = o$ folgt $\cos\varphi = -1$ d. h. $\varphi = \pm\pi$; nun ist freilich hierfür $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, gibt aber bei genauerer Untersuchnng seines Werthes in der That ∞. Die Coordinaten der dem Winkel $\varphi = \pm\pi$ entsprechenden Punkte sind

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\pi b, \\ y &= 2c. \end{aligned}\right\} \quad (A \text{ und } A')$$

Da nun unterhalb $y = 2c$ keine Punkte der Curve mehr liegen können, und die Untersuchung der Nachbarwerthe für $\cos(\pi \pm h) = -\cos h$ den Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ erscheinen lässt, also beide von A ausgehende Zweige concav sind, so folgt in Uebereinstimmung mit den vorherigen Ergebnissen, dass wir in diesem Punkte eine Spitze mit auf die Abscissenaxe senkrechter Tangente haben. (Dies konnte ausserdem auch aus der Periodicität der Curve gefolgert werden, wenn bewiesen war, dass die Tangente senkrecht ist.)

II. Erster Brennpunkt.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, auch die Gleichung der geraden Linie, von deren Erzeugung durch den ersten Brennpunkt unsere ganze Untersuchung ihren Ausgang nahm, als speciellen Fall aus der Gl. der Rollcurve im allgemeinen hervorgehen zu sehen.

Setzen wir daher in die betreffenden Gleichungen $z = a - c$, so bekommen wir

$$y = \frac{a(a+c) + (a+c)\cos\varphi}{a + c\cos\varphi} = a + c,$$
$$x = b\varphi = \xi.$$

$\frac{dy}{dx}$ wird $= o$ für jeden Werth von φ, wodurch es einleuchtend ist, dass wir es hier mit einer im Abstand $a + c$ der Abscissenaxe parallelen Geraden zu thun haben.

III. Mittelpunkt.

Um die Rollcurve $C\mu C'$ des Mittelpunktes C zu bekommen, haben wir in den allgemeinen Gleichungen z durch a zu ersetzen. Wir haben

$$y = \frac{b^2 + ac + c^2\cos\varphi}{a + c\cos\varphi} = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi} + c, x = b\left[\varphi - \frac{c\sin\varphi}{a + c\cos\varphi}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bc\sin\varphi}{(a + c\cos\varphi)^2 - c(a\cos\varphi + c)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c[(a - c\cos\varphi)\cos\varphi + c](a + c\cos\varphi)^3}{[(a + c\cos\varphi)^2 - c(a\cos\varphi + c)]^3}.$$

Aus $\frac{dy}{dx} = \infty$ d. h. $(a + c\cos\varphi)^2 - c(a\cos\varphi + c) = o$ folgt

$$(1) \qquad \cos\varphi = \frac{-a \pm \sqrt{4c^2 - 3a^2}}{2c} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2c}.$$

Dies gibt für unsere Ellipse, indem $a^2 = 4b^2$ ist, wenn man $a = 2b$, $c = b\sqrt{3}$ einführt,

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\varphi = 125^0\,15'\,51'',81.$$

Untersucht man ferner, ob Wendungspunkte vorhanden sind und setzt zu dem Zwecke

$$\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

so erhält man aus $(a - c\cos\varphi)\cos\varphi + c = o$

$$\cos\varphi = \frac{a \pm \sqrt{4c^2 + a^2}}{2c}, \tag{2}$$

dessen einzig brauchbarer Werth in unserm Fall ist

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{2,}$$

Nun ist in (2) das obere Zeichen unbrauchbar, dieser Ausdruck folglich nur einwerthig. Die Mittelpunktscurve besitzt daher, da sie symmetrisch ist, auf jeder Seite der Ordinatenaxe einen Wendungspunkt und, falls (1) reelle Werthe liefert, im allgemeinen zwei Punkte, in welchen die Tangente senkrecht zur Abscissenaxe steht. Hier in unserm Falle fallen alle drei zusammen und es steht die Tangente im Wendungspunkte senkrecht.

Die Coordinaten desselben sind

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm 0{,}772.b, \\ y &= 2{,}732.b. \end{aligned}\right\} (\nu \text{ und } \nu')$$

Der Lauf der Curve ist vollkommen ersichtlich: von dem Minimalpunkt μ, dessen Ordinate $y = a$ ist, steigt sie symmetrisch zuerst mit convexer, dann mit concaver Krümmung bis zu den Maximalpunkten

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\pi b, \\ y &= a + 2c. \end{aligned}\right\} (C \text{ und } C')$$

IV. Zweiter Brennpunkt.

Durch Einführung von $z = a + c$ in die allgemeinen Gleichungen ergeben sich

$$y = \frac{(a-c)[(a+c) + c(1-\cos\varphi)]}{a + c\cos\varphi},\quad x = b\left[\varphi - \frac{2c\sin\varphi}{a + c\cos\varphi}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2bc\sin\varphi}{(a + c\cos\varphi)^2 - 2c(a\cos\varphi + c)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c(a - c\cos\varphi)\cos\varphi(a + c\cos\varphi)^3}{[(a + c\cos\varphi)^2 - 2c(a\cos\varphi + c)]^3}.$$

Aus der vorhin schon allgemein geführten Untersuchung entnehmen wir hier die Thatsachen, dass die Curve für $\varphi = 2m\pi$, speciell für $\varphi = o$, einen Minimalpunkt besitzt, dessen Coordinaten sind

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= a - c, \end{aligned}\right\} (\beta)$$

sowie für $\varphi = (2m+1)\pi$, speciell für $\varphi = \pm\pi$, Maximalpunkte, deren Coordinaten sind

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\pi b, \\ y &= a + 3c, \end{aligned}\right\} (B \text{ und } B')$$

Coordinaten, die sich aus der früher erläuterten Bewegung auch ohne Weiteres erwarten liessen.

Aus $\frac{dy}{dx} = \infty$ d. h. $(a + c\cos\varphi)^2 - 2c(a\cos\varphi + c) = o$ folgt

$$\cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{c},$$

in unserem speciellen Falle

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Nehmen wir zunächst $\cos\varphi = +\sqrt{\frac{2}{3}}$, so ist

$$\varphi = 35^0\ 15'\ 51'',9.$$

Mit Hülfe dieses Werthes ergeben sich aus obigen Gleichungen einfach

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm 0{,}0297\,.\,b, \\ y &= 0{,}3179\,.\,b. \end{aligned}\right\} (\gamma \text{ und } \gamma')$$

Ist dann $\cos\varphi = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, so ist

$$\varphi = 144^0\ 44'\ 8'',1$$

und hierzu kommen in ähnlicher Weise

$$\left.\begin{aligned} x &= \mp 0{,}8883\,.\,b, \\ y &= 3{,}1463\,.\,b. \end{aligned}\right\} (\delta \text{ und } \delta')$$

Da nämlich die Curve symmetrisch ist, so entspricht dem Punkte γ ein solcher γ', auf der linken Seite der Ordinatenaxe und dem Punkte δ ein solcher δ' auf der rechten Seite derselben (weswegen wir den Zahlenwerthen von x gleich das doppelte Vorzeichen vorgesetzt haben), so dass also die Curve im ganzen 4 Punkte mit senkrechten Tangenten besitzt.

Offenbar muss nun die Curve bei ihrem Gang von γ nach δ die Ordinatenaxe passiren; desgleichen muss der zweite Zweig, von γ' nach δ' fortschreitend, diese Linie schneiden. Wegen der vollkommenen Symmetrie beider Zweige fallen beide Durchschnittspunkte zusammen, es entsteht der Doppelpunkt β'.

Ingleichen muss ein solches doppeltes Ueberschreiten der Ordinatenaxe beim Uebergang des ersten Zweiges von dem auf der linken Seite liegenden Punkt δ zu dem auf der rechten Seite liegenden Maximalpunkt und des zweiten Zweiges beim Uebergang von δ' zu dem auf der linken Seite sich befindenden Maximalpunkt stattfinden. Es ergibt sich ein zweiter Doppelpunkt β''.

Um die Ordinaten dieser Doppelpunkte zu bestimmen, haben wir die Bedingungsgleichung

$$x = o \text{ d. h.}$$

$$\varphi = \frac{2c\sin\varphi}{a + c\cos\varphi}. \tag{1}$$

Der die Gleichung zunächst befriedigende Werth $\varphi = o$ ist hier nicht verwendbar, weil er das schon mehrfach erwähnte Minimum β liefert.

Die Gleichung (1) ist nun allgemein nicht auflösbar; wir müssen daher zum Fortgang der Untersuchung zu unserer Ellipse ($a = 2b$) zurückkehren und haben

$$\varphi = \frac{2\sin\varphi}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \cos\varphi}.$$

Setzen wir $\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi + \varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi = F(\varphi)$ und hieraus

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi = F'(\varphi),$$

$$\Delta\varphi = -\frac{F(\varphi)}{F'(\varphi)} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi + \varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi}{\frac{2}{\sqrt{3}} - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi}, \tag{2}$$

so lässt sich mit Hülfe von (2) φ annähernd berechnen.

Für den unteren Doppelpunkt muss φ zwischen 35^0 und 144^0 liegen. Eine ungefähre Berechnung lieferte $\varphi_0 = 65^0$ und es ergaben sich nach und nach die Correctionen

$$\Delta\varphi_0 = -4^0 29' 24'', \quad \Delta\varphi_{,} = -20' 22'', \quad \Delta\varphi_{,,} = -4'',3,$$

so dass wir setzen dürfen

$$\varphi = 60^0 10' 9'',7;$$

die Coordinaten dieses Punktes sind daher

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0{,}43096\,.\,b. \end{aligned}\right\} (\beta')$$

Für den oberen Doppelpunkt liegt φ zwischen 144^0 und 180^0. Ungefähre Berechnung ergab hier $\varphi_0 = 165$ und wiederholte Anwendung des eben angedeuteten Verfahrens

$$\Delta\varphi_0 = -1^0 5' 30'', \quad \Delta\varphi_{,} = -44'', \quad \Delta\varphi_{,,} = 0'',4,$$

so dass wir setzen dürfen

$$\varphi = 163^0 53' 45'',6;$$

daher sind die Coordinaten dieses Punktes

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 5{,}68594\,.\,b. \end{aligned}\right\} (\beta'')$$

Um die Wendungspunkte zu bestimmen, haben wir aus $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$a - c\cos\varphi = 0, \quad \cos\varphi = 0, \quad a + c\cos\varphi = 0,$$

von welchen 3 Gl. der Natur der Sache nach nur die zweite brauchbar ist und liefert

$$\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

oder, wenn wir uns wiederum auf eine Periode beschränken,

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}; \text{ hierfür ist}$$

$$y = \frac{(a-c)(a+2c)}{a}, \quad x = \pm b\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2c}{a}\right], \quad \frac{dy}{dx} = tg\,\tau = \frac{\pm 2bc}{a^2 - 2c^2}$$

d. h. für unseren gegenwärtigen, speciellen Fall

$$\left.\begin{aligned} y &= 0{,}73205\,.\,b, \\ x &= \pm 0{,}16125\,.\,b, \\ tg\,\tau &= \mp 1{,}73205, \end{aligned}\right\} (\varkappa \text{ und } \varkappa')$$

wobei die oberen Zeichen sich auf den Wendungspunkt der rechten, die unteren auf den der linken Seite beziehen.

Diese Angaben werden hinreichen, um das Bild, welches wir von dieser Curve entworfen haben, vollkommen zu rechtfertigen.

V. Zweiter Scheitel.

Durch Einführung von $z = 2a$ erhalten wir endlich die Gleichungen der Rollcurve des zweiten Scheitels

$$y = \frac{b^2(1-\cos\varphi)}{a+c\cos\varphi}, \quad x = b\left[\varphi - \frac{(a+c)\sin\varphi}{a+c\cos\varphi}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(a+c)\sin\varphi}{(a+c\cos\varphi)^2-(a+c)(a\cos\varphi+c)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a+c)[(a-c\cos\varphi)\cos\varphi-(a-c)](a+c\cos\varphi)^3}{[(a+c\cos\varphi)^2-(a\cos\varphi+c)(a+c)]^3}.$$

Aus der einleitenden Untersuchung dieses Paragraphen wird noch erinnerlich sein, dass die Curve für $\varphi = 2m\pi$ Rückkehrpunkte, für $\varphi = (2m+1)\pi$ Maxima besitzt. Wenn wir wieder nur eine Periode der sich wiederholenden Curve ins Auge fassen, so sind die Coordinaten

der Spitze

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= o, \end{aligned}\right\} \ (\sigma')$$

der Maxima

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\pi b, \\ y &= 2(a+c). \end{aligned}\right\} \ (S \text{ und } S')$$

Die Untersuchung der Nachbarwerthe der Spitze d. h. die Einführunng von $\varphi = o \pm h$ macht $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ.

Um nun die Wendungspunkte der Curve zu finden, setzen wir $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ und erhalten hieraus die allein brauchbare Bedingungsgleichung

$$(a - c\cos\varphi)\cos\varphi - (a-c) = o;$$

hieraus folgt nach Absonderung des Factors $1-\cos\varphi$ der Werth

$$\cos\varphi = \frac{a-c}{c};$$

dies gibt für unsere specielle Ellipse

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1,$$

$$\varphi = 81^0\ 6'\ 2'';$$

hierzu finden wir die Coordinaten der Wendungspunkte

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\, 0{,}2103\,.\,b, \\ y &= 0{,}3727\,.\,b, \end{aligned}\right\} \ (\lambda \text{ und } \lambda')$$

indem dem Wendungspunkt des ersten Zweiges, für welchen das obere Zeichen gilt, natürlich wieder ein analoger auf der andern Seite entspricht. Zu ihnen gehört $tg\,\tau = \mp 1{,}4896$.

Setzen wir ferner $\frac{dy}{dx} = \infty$ d. h. $(a+c\cos\varphi)^2-(a+c)(a\cos\varphi+c) = o$,

so folgt zunächst $\cos\varphi = 1$ d. h. $\varphi = 2m\pi$; freilich wird hierfür eigentlich $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, aber, wie schon erwiesen, ist sein wahrer Werth $= \infty$. Dieser Werth entspricht den Spitzen. Sondert man den Faktor $1-\cos\varphi$ aus, so bekommt man

$$\cos\varphi = \frac{a(a-c)-c^2}{c^2}.$$

d. h. für unsere Ellipse

$$\cos\varphi = \frac{1-2\sqrt{3}}{3},$$

$$\varphi = 145^0\ 13'\ 20'';$$

hierzu finden wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \mp 1{,}15248\,.\,b, \\ y &= 3{,}15471\,.\,b. \end{aligned}\right\} \ (\varepsilon \text{ und } \varepsilon')$$

Es liegt Punkt ε, für welchen das obere Zeichen gilt, auf der linken Seite der Ordinatenaxe. Wegen der Symmetrie der Curve entspricht ihm ein analoger Punkt ε' auf der rechten Seite für einen gleichen aber negativ gezählten Winkel φ.

Da die Curve nun in dem ersten dieser Punkte auf der linken Seite der Axe der y, im nächsten Maximalpunkt aber wieder auf der rechten sich befindet, so ist zu vermuthen, dass sie für einen zwischen 145^0 und 180^0 liegenden Winkel φ die Axe der y durchschneiden muss und da dasselbe von dem zweiten Zweige geschieht, so muss wiederum eine Schleife oder ein Doppelpunkt entstehen. Wir haben wieder die allgemein nicht auflösbare, aus $x = o$ sich ergebende Bedingungsgleichung

(1) $$\varphi = \frac{(a+c)\sin\varphi}{a + c\cos\varphi},$$

worin der sich zunächst darbietende Werth $\varphi = o$, für welchen die beiden Zweige sich in dem Rückkehrpunkte vereinigen, ausgeschlossen bleibt. Für unsere specielle Ellipse sieht die Gl. so aus:

$$\varphi = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)\sin\varphi}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \cos\varphi}, \text{ wozu wir bilden}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{F(\varphi)}{F'(\varphi)} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi + \varphi\cos\varphi - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)\sin\varphi}{\frac{2}{\sqrt{3}} - \varphi\sin\varphi - \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi}.$$

Eine ungefähre Rechnung ergab $\varphi_0 = 165^0$ und zweimalige Anwendung des angedeuteten Verfahrens

$$\Delta\varphi_0 = +31'\,26'',\ \Delta\varphi_1 = +18'',8,$$

also

$$\varphi = 165^0\,31'\,44'',8;$$

hierzu folgen die Coordinaten des Doppelpunktes

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= 6{,}09564\,.\,b. \end{aligned}\right\} \ (\sigma'')$$

Der Verlauf scheint nach Festsetzung dieser merkwürdigen Punkte völlig klar zu sein und die gegebene Zeichnung $S\sigma S'$ ihm zu entsprechen.

VI.

Wir fanden bei der Rollcurve des zweiten Brennpunktes, dass beide Curvenzweige zweimal die Ordinatenaxe passiren d. h. sich zweimal schneiden müssen, während bei der Curve des Mittelpunktes die beiden Zweige (abgesehen von dem Minimum μ) die Ordinatenaxe nicht erreichen, sich also nicht schneiden können. Es steht zu vermuthen, dass es zwischen diesen beiden Punkten in

der Ellipsenaxe einen Punkt R gibt, dessen Rollcurve von der Art ist, dass beide Zweige sich einmal und zwar gerade in der Ordinatenaxe berühren. Es rücken dann beide Schleifen in eine gewissermassen zusammen und geben zugleich die Stelle der auf die Abscissenaxe senkrechten Tangente an. Für diese Curve, die wir noch auffinden und untersuchen wollen, muss es demnach einen Winkel φ von der Beschaffenheit geben, dass durch ihn gleichzeitig die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ und } x = o$$

befriedigt werden. Wir setzen daher

(1) $$(a + c\cos\varphi)^2 - (a\cos\varphi + c)(z - a + c) = o$$

und

(2) $$\varphi = \frac{(z - a + c)\sin\varphi}{a + c\cos\varphi};$$

man müsste aus diesen beiden Gleichungen φ eliminiren, um einen Ausdruck für z zu erhalten; diese Elimination ist jedoch allgemein nicht ausführbar und wir schlagen daher folgendes Verfahren ein, indem wir uns wieder auf unsere gegebene Ellipse ($a = 2b$) beziehen wollen.

Aus (2) folgt $z - a + c = \frac{\varphi(a + c\cos\varphi)}{\sin\varphi}$; dies gibt in (1) eingesetzt nach einer sehr leichten Reduction

$$(a + c\cos\varphi)\sin\varphi - (a\cos\varphi + c) = o$$

d. h. für unsere Ellipse

$$F(\varphi) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\varphi\cos\varphi - \varphi = o,$$

woraus wir ableiten

$$F'(\varphi) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\varphi\sin\varphi - 2\sin^2\varphi \text{ und den Correctionsausdruck}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{F(\varphi)}{F'(\varphi)} = -\frac{\tfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\varphi\cos\varphi - \varphi}{\tfrac{2}{\sqrt{3}}\varphi\sin\varphi - 2\sin^2\varphi}.$$

Als ungefähren Werth fand ich $\varphi_0 = 135^0$ und hierzu die Correctionen

$$\Delta\varphi_0 = +7^0\,11'\,11'', \quad \Delta\varphi_{,} = -19'\,34'', \quad \Delta\varphi_{,,} = -7'',$$

woraus folgte

$$\varphi = 141^0\,51'\,30''.$$

Die Substitution dieses Werthes in (2) lieferte

$$z = 2{,}82465\,.\,b.$$

Unsere neue Rollcurve besitzt daher (für die gegebene Ellipse) die Gleichungen

$$y = b\frac{3{,}03577 + 1{,}3507\cos\varphi}{2 + \sqrt{3}\cos\varphi}, \quad x = b\left[\varphi - \frac{2{,}5567\sin\varphi}{2 + \sqrt{3}\cos\varphi}\right]. \text{ vergl. §. 2 (9,)}$$

Aus $\frac{dy}{dx} = \infty$ folgt nun natürlich zunächst der vorhin abgeleitete Winkel φ, welcher den Doppelpunkt

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= 3{,}09434\,.\,b, \end{aligned}\right\} \ (\varrho')$$

liefert, und zweitens

$$\varphi = 79^0\,32'\,30'',$$

welcher die beiden andern Punkte der Curve mit senkrechten Tangenten ergibt, deren Coordinaten sind

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm 0{,}30193\,.\,b, \\ y &= 1{,}41762\,.\,b. \end{aligned}\right\} \ (\zeta \text{ und } \zeta')$$

Die Wendungspunkte fallen mit dem Doppelpunkte zusammen. Wenn wir aus der allgemeinen Untersuchung dieses Paragraphen noch hinzufügen, dass die Curve für $\varphi = o$ ein Minimum

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= 2a - z = 1{,}17535\,.\,b, \end{aligned}\right\} \ (\varrho)$$

und für $\varphi = \pm \pi b$ Maxima

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \pi b, \\ y &= 2c + z = 2c + 2{,}82465\,.\,b, \end{aligned}\right\} (R \text{ und } R')$$

liefert, so dürfte der Verlauf derselben hiermit vollkommen klar dargestellt sein.

Fassen wir schliesslich unsere Erkenntnisse über diese elliptischen Cycloiden, wenn wir zur abkürzenden Bezeichnung uns dieses Ausdrucks bedienen dürfen, zusammen:

Der untere Scheitel beschreibt eine Curve, welche in ihrer Gestaltung an die gemeine Cycloide erinnert; alle Punkte vom unteren Scheitel bis zum ersten Brennpunkt beschreiben Linien, die mit den gedehnten Cycloiden Aehnlichkeit haben, während der Brennpunkt selbst die gerade Linie durchläuft. Die Curven aller Punkte zwischen diesem Brennpunkt und dem zweiten Scheitel senken sich zuerst concav und erreichen unter convexer Krümmung ihr Minimum. Dabei berühren sich beide Zweige zuerst für $z = 2{,}82465\,.\,b$ und bilden für alle folgenden z zwei Schleifen, deren untere für $z = 2a$, die Curve des zweiten Scheitels, in eine Spitze übergeht.

Wird die Ellipse zum Kreis, indem $a = b$ d. h. $c = o$ gesetzt wird, so gehen die Gleichungen der Rollcurven in die bekannten Gleichungen der gedehnten und verkürzten Cycloide

$$y = a + (a - z)\cos\varphi, \quad x = a\varphi + (a - z)\cos\varphi$$

über. Setzt man auch $z = o$, so erhält man

$$y = a(1 + \cos\varphi), \quad x = a(\varphi + \cos\varphi)$$

und auch

$$x = a\,Arc\cos\frac{a - y}{a} \pm \sqrt{2ay - y^2},$$

wie man sieht, die Gleichung der gemeinen Cycloide.

Setzt man $z = a$, so bekommt man

$$y = a, x = a\varphi = \xi,$$

d. h.: der Mittelpunkt (Brennpunkt) des Kreises erzeugt eine der Abscissenaxe im Abstand a parallele gerade Linie.

In der That findet man für diesen speciellen Fall der Ellipse als Gl. der Grundcurve

$$\eta = o,$$

die Gl. der Abscissenaxe, an welcher der Kreis sich abrollt.

B. Hyperbel.

§. 1.

Allgemeine Entwickelung der Rollcurvengleichung.

Fig. 2. Es sei NAM die im ersten Kapitel gefundene Grundcurve des rollenden Hyperbelzweiges und M der Berührungspunkt beider Curven in irgend einer fixirten Lage, K ein beliebiger Punkt der Hyperbelaxe. Zur Vermeidung negativer Ordinaten wollen wir Ay als den positiven Theil der Ordinatenaxe ansehen. Wir haben

$$\overline{MK}^2 = \overline{KV}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{BV}^2.$$

Setzen wir $KS = z$ und, wenn C der Mittelpunkt der Hyperbel ist, $CV = w$, so ist

$$BV = w - c,\ KV = z - a + w,\ BM = c - a + \eta,$$

also $$B'M = c + a + \eta \text{ und demnach } BM + B'M = 2(c + \eta),$$

und da nach bekannten Relationen $BM + B'M = \frac{2c}{a} w$, so folgt

$$w = \frac{a}{c}(c + \eta).$$

Substituirt man alles dies in obige Gl. und reducirt, so bekommt man

$$\overline{MK}^2 = z^2 + \eta^2 + 2\eta \frac{c^2 + a(z-a)}{c}.$$

Betrachten wir nun die Rollcurve als entstehend aus den Durchschnitten aller auf einander folgenden Kreise vom Mittelpunkt M und Radius MK, so folgt, wenn man für MK gleich seinen Werth einführt,

$$(1) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \eta^2 + z^2 + 2\eta \frac{c^2 + a(z-a)}{c}.$$

Die Differentiation von (1) versieht uns mit der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{b^2 + cy + az}{c} d\eta + (x - \xi) d\xi = 0.$$

Die Gleichung der Grundcurve ist unter den veränderten Umständen

$$(3) \qquad \eta = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}\right) - c \text{ und ihr erster Differentialquotient}$$

$$(4) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{c}{b} \cdot \frac{e^{\frac{\xi}{b}} - e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}.$$

Die Elimination von $(x - \xi)$ aus (1) und (2) liefert

$$\left[\frac{b^2 + cy + az}{c}\right]^2 \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = z^2 - y^2 + 2\eta \frac{b^2 + cy + az}{c},$$

$$(5) \qquad \left[\frac{b^2 + cy + az}{c}\right]^2 \left(\frac{e^{\frac{\xi}{b}} - e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}\right)^2 = b^2(z^2 - y^2) + 2b^2[b^2 + cy + az]\left[\frac{e^{\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}}{2} - 1\right],$$

oder $$[b^2 + cy + az]^2 \left[\frac{e^{\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}\right]^2 = b^2(z^2 - y^2) + 2b^2[b^2 + cy + az] \frac{e^{\frac{\xi}{b}} + e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}$$
$$- 2b^2[b^2 + cy + az] + [b^2 + cy + az]^2.$$

Subtrahirt man beiderseits das zweite Glied der rechten Seite und addirt b^4, so bekommt man nach einigen unschweren Reductionen

$$\left[(b^2+cy+az)\frac{e^{\frac{\xi}{b}}+e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}-b^2\right]^2=a^2y^2+c^2z^2+2ay.cz$$

und hieraus

$$\frac{e^{\frac{\xi}{b}}+e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}=\frac{b^2\pm(ay+cz)}{b^2+cy+az}. \tag{5,}$$

Indem man diese Gleichung quadrirt und beiderseits 1 abzieht, erhält man ohne Mühe

$$\frac{e^{\frac{\xi}{b}}-e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}=\frac{\pm b\sqrt{z^2-y^2+2[\pm(ay+cz)-(cy+az)]}}{b^2+cy+az}. \tag{6}$$

Die Addition von (5) und (6) liefert einen Ausdruck für $e^{\frac{\xi}{b}}$, aus welchem man sofort ableiten kann

$$\xi=b\,l\,\frac{b^2\pm(ay+cz)\pm b\sqrt{z^2-y^2+2[\pm(ay+cz)-(cy+az)]}}{b^2+cy+az}. \tag{7}$$

Aus (2) und (4) folgt ferner

$$x=\xi-\frac{b^2+cy+az}{b}\cdot\frac{e^{\frac{\xi}{b}}-e^{-\frac{\xi}{b}}}{2}$$

und wenn nun schliesslich in diese Gleichung die Ausdrücke (6) und (7) eingeführt werden, so folgt

$$x=b\,l\frac{b^2\pm(ay+cz)\pm b\sqrt{z^2-y^2+2[\pm(ay+cz)-(cy+az)]}}{b^2+cy+az} \tag{8}$$
$$+\sqrt{z^2-y^2+2[\pm(ay+cz)-(cy+az)]},$$

die Gleichung der Rollcurve des Punktes K in ihrer allgemeinsten Gestalt.

---

§. 2.

Besondere Fälle.

Wir wollen zur Untersuchung einiger der durch die letzte Gleichung repräsentirten Curven wieder eine bestimmte und zwar, was sich leicht darbietet, eine gleichseitige Hyperbel zu Grunde legen, wofür wir also $a=b$ zu nehmen haben. Wenn wir dann zur Abkürzung den Zähler des auf der rechten Seite von Gl. (5,) stehenden Bruches mit v, seinen Nenner mit w bezeichnen, so geht Gl. (8) über in

$$x=a\,l\,\frac{v\pm\sqrt{v^2-w^2}}{w}\mp\frac{\sqrt{v^2-w^2}}{a},$$

d. h.

$$x=\frac{a}{2}\,l\,\frac{v\pm\sqrt{v^2-w^2}}{v\mp\sqrt{v^2-w^2}}\mp\frac{\sqrt{v^2-w^2}}{a},$$

$$x=\mp\left[\frac{a}{2}\,l\,\frac{v-\sqrt{v^2-w^2}}{v+\sqrt{v^2-w^2}}+\frac{\sqrt{v^2-w^2}}{a}\right]. \tag{9}$$

Durch Differentiation folgt aus (9) nach einigen unschweren Reductionen

$$(10) \qquad dx = \mp \frac{(a^2 v - w^2)\,dw - w(a^2 - v)\,dv}{aw\sqrt{v^2 - w^2}}.$$

Aus Gleichung (9) kann man zunächst erkennen, dass alle unsere Rollcurven gegen die Ordinatenaxe symmetrisch sind, indem jedem Werth von y zwei gleiche, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftete Werthe von x entsprechen.

I.

Fig. 8.

Setzt man zunächst $z = o$, so bekommt man unter Berücksichtigung der angegebenen Bedeutung von v und w, wenn wir in v nur das obere Zeichen gelten lassen, aus (9), nachdem man ins Quadrat erhoben

$$x^2 = \left[\frac{a}{2}\, l \frac{a + y - \sqrt{-y^2 - 2(c-a)y}}{a + y + \sqrt{-y^2 - 2(c-a)y}} + \sqrt{-y^2 - (2c-a)y}\right]^2,$$

die Gleichung der Curve $\sigma S \sigma'$, welche des Scheitel des rollenden Hyperbelzweiges erzeugt.

Da für positive y die Wurzelgrösse imaginär wird, so lässt die Gleichung schliessen, dass die Curve ganz auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegt. Es gehören zusammen

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= o. \end{aligned}\right\} \ (S)$$

Setzt man in (10)

$$v = a^2 + ay, \quad dv = a\,dy,$$
$$w = a^2 + cy, \quad dw = c\,dy,$$

so lässt sich $\frac{dy}{dx}$ bestimmen. Der hieraus fliessende Ausdruck liefert für $y = o$ zwar zunächst den unbestimmten Werth $\frac{o}{o}$, ergibt jedoch nach genauer Bestimmung ∞.

Wenn man endlich den Zähler des Logarithmanden $= o$ setzt, so folgt einerseits $y = -\frac{c}{2}$, andererseits $x = \infty$.

Die Curve beginnt daher in zwei symmetrischen Zweigen in dem Coordinatenanfangspunkt. Die Zweige bilden hier eine Spitze, deren Tangente senkrecht zur Abscissenaxe steht, durchschneiden die Brennpunktslinie in den Punkten

$$\left.\begin{aligned} x = \mp\left(\frac{a}{2}\, l \frac{a}{3a - 2c} + a - c\right) &= 0{,}4671\,.\,a \end{aligned}\right\} \ (B \text{ und } B')$$

und verlaufen ins Unendliche bis zu den Grenzwerthen

$$\left.\begin{aligned} x &= \mp\infty, \\ y &= -\frac{c}{2}. \end{aligned}\right\} \ (\sigma \text{ und } \sigma')$$

Es stelle nun in Figur (5) AX die Abscissenaxe, BB die gerade Brennpunktslinie vor und es möge sich die Hyperbel so weit herum gedreht haben, dass die in der ursprünglichen Lage nach rechts gehende Asymptote die senkrechte Stellung ML erreicht hat; dann ist $BS = c - a$, daher

$$SU = \frac{c-a}{\sqrt{2}}, \text{ also}$$

$$SW = WU + SU = c - a + \frac{c-a}{\sqrt{2}} = \frac{c}{2},$$

wenn man berücksichtigt, dass hier unter Voraussetzung der gleichseitigen Hyperbel

$$c = a\sqrt{2} \text{ oder } a = \frac{c}{\sqrt{2}} \text{ ist.}$$

Dies ist aber (natürlich mit entgegengesetztem Zeichen) der Werth der letzten Ordinate. Hieraus folgt der Satz:

Die Hyperbel liegt, nachdem sie sich vollständig an ihrer Grundcurve abgerollt hat, so, dass ihre Asymptoten den Coordinatenaxen (und zwar die eine in der Richtung der Grundcurvenaxe) parallel sind. Ihre Axe dreht sich also nach jeder Seite nur um einen Winkel von 135^0 herum. Offenbar lässt sich der erste Theil des Satzes ohne Weiteres und der zweite mit gehöriger Modification auf alle andern Hyperbeln ausdehnen.

II.

Um die Rollcurve des Mittelpunktes zu bestimmen, setzen wir $z = a$ und erhalten aus (9) unter ähnlichen Annahmen, wie in I die Gleichung

$$x^2 = \left[\frac{a}{2} l \frac{a+c+y-\sqrt{a^2+2a(c+y)-(c+y)^2}}{a+c+y+\sqrt{a^2+2a(c+y)-(c+y)^2}} + \sqrt{a^2+2a(c+y)-(c+y)^2}\right]^2.$$

Für $y = a$ wird die Wurzelgrösse $= o$, daher $x = o$.

Nun folgt aus (10), wenn man für v und w die gehörigen Werthe einsetzt,

$$dx = \mp \frac{[a^2+a(c+y)-(c+y)^2]dy}{(c+y)\sqrt{a^2+2a(c+y)-(c+y)^2}},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{(c+y)\sqrt{a^2+2a(c+y)-(c+y)^2}}{a^2+a(c+y)-(c+y)^2}.$$

Für $y = a$ wird $\frac{dy}{dx} = o$.

Die Bestimmung des zweiten Differentialquotienten für diesen Werth von y kann man auf folgende Weise abkürzen. Wir setzen zur bequemeren Darstellung

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{Z}{N},$$

dann ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = + \frac{N\frac{dZ}{dy} - Z\frac{dN}{dy}}{N^2} \cdot \frac{Z}{N}.$$

Da nun Z für $y = a$ zu o wird, so lassen wir $Z \frac{dN}{dy}$ fort und erhalten

$$+ \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{Z}{N^2}.$$

Dies ist nicht ohne Weiteres $= o$ zu setzen, denn es ist

$$\frac{dZ}{dy} = \sqrt{a^2 + 2a(c+y) - (c+y)^2} + \frac{(c+y)[a-(c+y)]}{\sqrt{a^2 + 2a(c+y) - (c+y)^2}}$$

und es wird der zweite Summand durch Multiplication mit Z

$$(c+y)^2[a-(c+y)],$$

während der erste allerdings verschwindet. Daher nimmt $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $y = a$ den Werth an

$$- \frac{c(a+c)^2}{N^2}.$$

Die Curve ist folglich in dem fraglichen Punkt concav.

Für $y = o$ folgt

$$x = \mp \left[\frac{a}{2} l \frac{a+c-\sqrt{a^2+2ac-c^2}}{a+c+\sqrt{a^2+2ac-c^2}} + \sqrt{a^2+2ac-c^2} \right]$$

$$= \pm a \left[\frac{1}{2} l \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}} + \sqrt{2\sqrt{2}-1} \right] = \pm 0{,}719 \,.\, a.$$

Für $y = -(c-a)$ haben wir

$$x = \pm \frac{a}{2} l \left[\frac{2a-\sqrt{2a^2}}{2a+\sqrt{2a^2}} + \sqrt{2a^2} \right] = 0{,}5327 \,.\, a.$$

Die Gleichung $x = o$ wird ausser dem oben angegebenen Werthe von y, welcher die Wurzelgrösse annullirt, auch dann befriedigt, wann

$$\frac{a}{2} l \frac{v-\sqrt{v^2-w^2}}{v+\sqrt{v^2-w^2}} = -\frac{\sqrt{v^2-w^2}}{a} \text{ ist.}$$

Diese transcendente Gleichung ist allgemein nicht auflösbar. Setzt man in dieselbe die unserer Curve entsprechenden Werthe von v und w und bringt die Gleichung wieder auf die Form $F(y) = o$, so kann man einen Näherungswerth für y dadurch finden, dass man einen ungefähr abgeschätzten Werth y_0 mittels des Ausdrucks

$$\Delta y = -\frac{F(y)}{F'(y)}$$

corrigirt. Wir erwählten $y_0 = -a$ und fanden

$$\Delta y = +0{,}042 \,.\, a,$$

welche Correction

$$y = -0{,}958 \,.\, a \text{ ergibt.}$$

Da wir endlich, wenn wir den Zähler des Logarithmanden $= o$ setzen, einerseits $y = -c$, andererseits $x = \infty$ erhalten, so entwerfen wir uns, alles zusammenfassend, von unserer Rollcurve folgendes Bild.

Die Curve beginnt im Punkt

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= a, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

in welchem sie ihr Maximum erreicht und daher concav ist, in zwei symmetrischen Zweigen. Diese durchschneiden die Abscissenaxe in den Punkten

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm 0{,}719\,.\,a, \\ y &= o, \end{aligned}\right\} \quad (D \text{ und } D')$$

und die Brennpunktslinie in den Punkten

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm 0{,}5327\,.\,a, \\ y &= -(c-a), \end{aligned}\right\} \quad (E \text{ und } E')$$

kreuzen sich einander in der Ordinatenaxe für

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= -0{,}958\,.\,a, \end{aligned}\right\} \quad (C),$$

um von hier aus ins Unendliche fortzugehen, sich den Grenzwerthen

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\infty, \\ y &= -c, \end{aligned}\right\} \quad (a \text{ und } a')$$

nähernd. In der Fig. (5) ist $MV = MR + RV = a + c - a = c$. Es wird daher auch durch diese Rollcurve der oben ausgesprochene Satz über die letzte Lage der Hyperbel bestätigt.

Aehnliche Curven wie die hier beschriebene des Mittelpunktes werden dann auch der zweite Brennpunkt und der zweite Scheitel der Hyperbel erzeugen. Wir unterlassen jedoch die genaue Untersuchung derselben, da sie keine wesentlich neuen interessanten Eigenschaften in Aussicht stellen.

III.

Setzt man $z = -(a-c)$, so folgt in Gleichung (5,), wenn wieder nur die oberen Zeichen berücksichtigt werden,

$$v = a(y - a + c),$$
$$w = c(y - a + c);$$

daher ist im allgemeinen $\sqrt{v^2 - w^2}$ imaginär und es erhält Gleichung (9) nur dann einen Sinn, wenn sowohl $v = o$, als auch $w = o$ gesetzt wird. Sie liefert dann freilich immer noch

$$x = \pm \frac{a}{2} l \frac{o}{o},$$

also einen Ausdruck von unbestimmbarem Werth, während aus $v = w = o$ folgt

$$y = -(c - a),$$

die Gleichung der von dem ersten Brennpunkt erzeugten geraden Linie, wodurch auch die Unbestimmbarkeit von x in diesem Fall sich rechtfertigt.

IV.

Während alle ausserhalb des rollenden Hyperbelzweiges liegende Punkte K Curven erzeugen, die der beschriebenen Mittelpunktscurve ähnlich sind, bleibt es noch übrig, einen Blick auf die von Punkten im Innern herrührenden Curven zu werfen. Hierzu gehört auch der letzthin besprochene Brennpunkt; da dessen Curve aber eine besondere Stellung einnimmt, so wollen wir noch einen andern Fall in Kürze betrachten, indem wir $z = -a$ setzen. Die Gleichung der Rollcurve wird

$$x^2 = \left[\frac{a}{2} l \frac{y - c + a - \sqrt{-y^2 - 2(c-a)y + (c-a)^2}}{y - c + a + \sqrt{-y^2 - 2(c-a)y + (c-a)^2}} + \sqrt{-y^2 - 2(c-a)y + (c-a)^2}\right]^2.$$

Zu $y = -a$ gehört, indem die Wurzelgrösse sich auf o reducirt,

$$x = o;$$

ferner ist hier

$$dx = \pm \frac{[(a+y)(c-a)+y^2]\,dy}{y\sqrt{-y^2-2(c-a)y+(c-a)^2}},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y\sqrt{-y^2-2(c-a)y+(c-a)^2}}{(a+y)(c-a)+y^2},$$

ein Ausdruck, der für die eben angenommenen Coordinaten ebenfalls $= o$ wird. Der zweite Differentialquotient lässt sich für diesen Werth von y, wenn wir wieder zur Abkürzung schreiben

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{Z}{N},$$

auf ähnliche Weise, wie in II bestimmen und liefert einen positiven Werth, woraus wir schliessen, dass die Curve in diesem Punkt convex ist.

In dem Augenblick, wo bei der Umdrehung der Hyperbel ihre Axe der Abscissenaxe parallel ist, fällt sie mit der Brennpunktslinie zusammen und es befindet sich der erste Scheitel der Hyperbel in dem Durchschnitt dieser geraden Linie mit der Rollcurve I. Für diesen Punkt ist, wie wir oben gesehen haben,

$$x = \pm\left[\frac{a}{2}\,l\,\frac{a}{3a-2c} + a - c\right];$$

daher sind die Coordinaten des Durchschnitts unsrer jetzigen Rollcurve mit der Brennpunktslinie

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\left[\frac{a}{2}\,l\,\frac{a}{3a-2c} + 2a - c\right], \\ y &= -(c-a). \end{aligned}\right\} \quad (H \text{ und } H')$$

Der für diese Punkte untersuchte zweite Differentialquotient lieferte einen negativen Werth, so dass die Curve hier concav ist.

Für

$$\left.\begin{aligned} y &= o \\ x &= \pm\infty. \end{aligned}\right\} \quad (\gamma \text{ und } \gamma')$$

folgt aus der Gleichung der Rollcurve

Die Curve beginnt daher im Punkte

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= -a, \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

mit convexer Krümmung in zwei symmetrischen Zweigen, durchschneidet, nachdem sie concav geworden, die Brennpunktslinie mit den Abscissen

$$x = \pm 1{,}4671\,.\,a \quad (H \text{ und } H')$$

und wendet sich gegen die Abscissenaxe als ihre Asymptote. Fig. 5 bestätigt das letztere, indem $MV = c$, mithin

$$MC = \sqrt{2c^2} = \sqrt{4a^2} = 2a,$$

also in der That in dieser dem Unendlichen entsprechenden Lage der Hyperbel der erzeugende Punkt in der Abscissenaxe liegt.

C. Parabel.

§. 1.

Allgemeine Entwickelung der Rollcurvengleichung.

Es sei M der Berührungspunkt der beweglichen Parabel in irgend einer Lage mit ihrer Grundcurve, welche, wie wir oben erkannt haben, eine congruente Parabel ist, und K irgend ein Punkt der Parabelaxe, dessen Bewegung untersucht werden soll. Es ist Fig. 3.

$$\overline{MK}^2 = \overline{MV}^2 + (KS + SV)^2.$$

Zur Vermeidung der negativen Ordinaten wollen wir die positiven y und η in der Richtung AY zählen.

Da nun vermöge der Natur der Bewegung $Arc\,AM = Arc\,SM$, so ist $MV = RM = \xi$ und $SV = AR = \eta$; demnach, wenn $KS = z$ gesetzt wird,

$$\overline{MK}^2 = \xi^2 + (\eta + z)^2.$$

Die Rollcurve entsteht nun aus den Durchschnitten aller auf einander folgenden Kreise deren Mittelpunkt M und Radius MK sind, und es folgt daher

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \xi^2 + (\eta + z)^2,$$

welche Gleichung sich zusammenziehen lässt in

(1) $$x^2 - 2\xi x + y^2 - 2\eta(y + z) - z^2 = o.$$

Wir differentiiren nach ξ und η, um zum benachbarten M überzugehen, und erhalten

(2) $$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{x}{y + z},$$

während wir aus der der neuen Annahme in Betreff der Coordinaten entsprechenden Grundcurvengleichung

(3) $$\xi^2 = m\eta$$

erhalten

(4) $$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\xi}{m}.$$

Aus (2) und (4) ergibt sich

$$\xi = -\frac{m}{2}\,\frac{x}{y + z}, \text{ daher } \eta = \frac{m}{4}\,\frac{x^2}{(y + z)^2}.$$

Werden diese beiden letzten Werthe in (1) eingesetzt, so fliesst daraus

$$x^2 + y^2 - z^2 + \frac{m}{2}\,\frac{x^2}{y + z} = o \text{ oder}$$

(5) $$(x^2 + y^2 - z^2)(y + z) + \frac{m}{2}x^2 = o,$$

die allgemeine Gleichung der Rollcurve des Punktes K.

§. 2.

Discussion der Rollcurvengleichung.

Zunächst ergibt sich, da x nur in der zweiten Potenz vorkommt, dass die Curve gegen die Ordinatenaxe symmetrisch ist. Fig. 9.

Aus (5) leiten wir ab

$$\frac{\partial F}{\partial x} = [2(y+z)+m]x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y+z)y + x^2 + y^2 - z^2,$$

daher ist

(1) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)} = -\frac{[2(y+z)+m]x}{2(y+z)y + x^2 + y^2 - z^2};$$

ferner $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2(y+z)+m, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y + 2z,$$

also ist

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$= -\frac{y + z + \frac{m}{2} + 2x\frac{dy}{dx} + (3y+z)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3y+z}.$$

Für $x = o$ liefert die Gleichung der Rollcurve $y = \pm z$. Setzen wir zunächst nun $x = o$, $y = +z$ in die Gleichungen (1) und (2), so liefern dieselben

$$\frac{dy}{dx} = o, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{z + \frac{m}{4}}{2z}.$$

Die Curve erreicht (vorläufig z nur positiv genommen, d. h. K ausserhalb der Parabel) in diesem Punkt ein Maximum.

Dagegen liefert $x = o$, $y = -z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}.$$

Es ist daher hier ein Doppelpunkt zu erwarten. In der That finden wir aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = o$$

nach Einsetzung aller gehörigen Werthe

$$m - 4z\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = o,$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{z}}.$$

Beide Aeste der von dem Maximalpunkt aus nach beiden Seiten symmetrisch verlaufenden Curve kreuzen sich daher in dem Punkte $x = o$, $y = -z$, so dass ihre Tangenten mit der Abscissenaxe die Winkel bilden $Arc\,tg\left(+\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{z}}\right)$ und $Arc\,tg\left(-\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{z}}\right)$.

Aus ihrem Verlauf wollen wir noch folgende Punkte festsetzen:

1) Die Punkte der auf die Abscissenaxe senkrechten Tangenten. Wir setzen

$$\frac{dy}{dx} = \infty, \text{ daher } 2(y+z)y + x^2 + y^2 - z^2 = o;$$

eliminiren wir aus dieser Gleichung und der Hauptgleichung [§. 1, (5)] x^2, so erhalten wir

$$2(y+z)y + \frac{(z^2-y^2)(z+y)}{\frac{m}{2}+y+z} - (z^2-y^2) = o,$$

d. h. zunächst $y+z=o$,

ein Ausdruck, der hier nicht verwendbar ist, indem durch ihn, wie vorhin erläutert wurde, $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ wird;

ferner aber bekommen wir

$$\left(\frac{m}{2}+y+z\right)(3y-z) + z^2 - y^2 = o, \text{ woraus wir ziehen}$$

$$(4) \qquad y = \frac{-\left(z+\frac{3}{4}m\right) \pm \sqrt{mz+z^2+\frac{3}{2}mz+\frac{9}{16}m^2}}{2},$$

wofür aus der Hauptgleichung noch x zu berechnen ist.

2) Die Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe finden wir, indem wir $y=o$ in die Hauptgleichung einführen, und erhalten

$$(x^2-z^2)z + \frac{m}{2}x^2 = o$$

$$(4) \qquad x = \pm\sqrt{\frac{z^3}{z+\frac{m}{2}}}.$$

3) Die Durchschnittspunkte mit der geraden Brennpunktslinie erhält man für $y = -\frac{m}{4}$. Die Hauptgleichung ergibt

$$\left[x^2 + \left(\frac{m}{4}\right)^2 - z^2\right]\left(z - \frac{m}{4}\right) + \frac{m}{2}x^2 = o,$$

daher

$$x^2 = \frac{\left[z^2 - \left(\frac{m}{4}\right)^2\right]\left(z-\frac{m}{4}\right)}{z+\frac{m}{4}} = \left(z-\frac{m}{4}\right)^2,$$

$$(5) \qquad x = \pm\left(z-\frac{m}{4}\right).$$

Aus der Hauptgleichung folgt

$$x^2 = \frac{(z^2-y^2)(z+y)}{\frac{m}{2}+z+y};$$

hieraus ergibt sich für $x = \infty$

$$y = -\left(z + \frac{m}{2}\right).$$

Bezeichnen wir mit L den Durchschnitt der Tangente der Curve mit der Ordinatenaxe, so ist bekanntlich

$$AL = y - x\,\frac{dy}{dx}$$

und für den unendlich entfernten Punkt

$$\begin{aligned} Lim\, AL &= Lim\left(y - x\,\frac{dy}{dx}\right) \\ &= Lim\left(y + \frac{2(y+z)x^2 + mx^2}{2(y+z)y + x^2 + y^2 - z^2}\right) \qquad x = \infty,\ y = -\left(z + \frac{m}{2}\right), \\ &= Lim\left(y + \frac{[2(y+z)+m]x^2(y+z)}{2(y+z)^2 y + [x^2 + y^2 - z^2](y+z)}\right) \\ &= Lim\left(y + \frac{[2(y+z)+m]x^2(y+z)}{2(y+z)^2 y - \frac{m}{2}x^2}\right) \\ &= Lim\, y + Lim\left(\frac{[2(y+z)+m](y+z)}{\frac{2(y+z)^2 y}{x^2} - \frac{m}{2}}\right), \end{aligned}$$

d. h. endlich

$$(6) \qquad Lim\, AL = -\left(z + \frac{m}{2}\right),$$

daher nähern sich die Curvenäste, ins Unendliche fortschreitend, einer Asymptote, welche im Abstand $y = -\left(z + \frac{m}{2}\right)$ mit der Abscissenaxe parallel geht.

Es sei in Figur (6) AX die Abscissenaxe, BB die gerade Brennpunktslinie, SL die Axe der rollenden Parabel in der der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung; dann ist $KS = z$, $SB = BL = \frac{m}{4}$,

daher

$$KL = z + \frac{m}{2}.$$

Dies ist aber (vom Zeichen natürlich abgesehen) der Werth der letzten Ordinate unserer Rollcurve. Daher folgt der Satz:

Die Parabel liegt, nachdem sie auf der einen Seite der Grundcurve vollständig abgerollt ist, so, dass ihre Axe ihrer anfänglichen Lage wieder parallel ist, aber entgegengesetzte Richtung hat. Die Axe dreht sich folglich nach beiden Seiten um einen Winkel von 180^0 herum. Die Parabel ist in ihrer letzten Lage der Grundparabel parallel.

§. 2.

Besondere Fälle.

I.

Zuvörderst wollen wir die Curve $\sigma S \sigma'$, welche der Scheitel der Parabel erzeugt, als speciellen Fall der allgemeinen Rollcurve dadurch ableiten, dass wir $z = o$ setzen. Gleichung (1) wird unter dieser Annahme Fig. 9.

$$(x^2 + y^2)y + \frac{m}{2}x^2 = o \qquad \text{oder}$$

$$(1) \qquad y^3 + \left(\frac{m}{2} + y\right)x^2 = o,$$

die Gleichung der Cissoide, deren Erzeugungskreis den halben Parameter der Parabel zum Durchmesser und den Brennpunkt derselben in ihrer Anfangsstellung zum Mittelpunkt besitzt. Beide Aeste vereinigen sich im Punkt S zu einer Spitze, deren Tangente auf die Abscissenaxe senkrecht steht; denn Gleichung (3) liefert für diesen Punkt

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{o}} = \pm\infty.$$

Gleichung (5) gibt

$$x = \pm\frac{m}{4} \quad (B \text{ und } B')$$

für die Durchschnitte mit der geraden Brennpunktslinie, während aus (6) folgt, dass die Curve sich einer Asymptote nähert, die im Abstand $y = -\frac{m}{2}$ mit der Abscissenaxe parallel geht, alles Eigenschaften der bekannten Cissoide. Man könnte daher eine Cissoide, deren Constante a sein soll, einfach auf mechanischem Wege construiren, wenn man zwei congruente Parabeln vom Parameter $2a$ in der angegebenen Weise rollen lässt.

II.

Als zweiter specieller Fall soll die Curve $\gamma C \gamma'$ untersucht werden, welche der Durchschnittspunkt der Directrix der rollenden Parabel mit ihrer Axe erzeugt. Für dieselbe ist $z = +\frac{m}{4}$.

Ihre Gleichung ist demnach

$$\left[x^2 + y^2 - \left(\frac{m}{4}\right)^2\right]\left(\frac{m}{4} + y\right) + \frac{m}{2}x^2 = o.$$

$$\text{Für } x = o,\ y = +\frac{m}{4} \text{ folgt } \frac{dy}{dx} = o,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8}{m}.$$

Die Curve erreicht daher in diesem Punkt ihr Maximum.

Für die Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe finden wir nach Gleichung (4)

$$x = \pm\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{4}\right)^3}{\frac{m}{4} + \frac{m}{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{m}{4} = \pm 0{,}577\ldots\frac{m}{4}.$$

Gleichung (5) liefert für den angenommenen Werth von z

$$x = o.$$

In diesem einen Durchschnittspunkte (C') der Curve mit der geraden Brennpunktslinie ist schon deswegen, weil beide Durchschnittspunkte in einen zusammenrücken, ein Doppelpunkt zu erwarten. In der That findet nach der Entwickelung des §. 2 hier die Schleife statt und es folgt aus (3)

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

Beide Zweige durchkreuzen sich hier also unter rechten Winkeln. Diesen Doppelpunkt durchzieht der sich bewegende Punkt C in dem Moment, wo die Parabelaxe horizontal liegt, also mit der Brennpunktslinie zusammenfällt.

Endlich erkennen wir aus (6), dass die Asymptote im Abstand $y = -\frac{3}{4}m$ mit der Abscissenaxe parallel lauft, was auch genau mit dem, was über die letzte Lage der Parabel gesagt ist, übereinstimmt.

Für die Punkte der auf die Abscissenaxe senkrechten Tangenten folgt aus (4)

$$y = \frac{-m \pm m\sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = (\pm\sqrt{5} - 2)\frac{m}{4}.$$

Die Annahme des unteren Vorzeichens würde eine Ordinate ergeben, die mit der letzten Ordinate gleiches Vorzeichen hat und ihrem absoluten Werth nach grösser ist, als diese. Zudem findet man, wenn man $y = (\pm\sqrt{5} - 2)\frac{m}{4}$ in die Hauptgleichung einsetzt, nach leichten Reductionen

$$x^2 = \frac{7 \mp 3\sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} \cdot \frac{m^2}{4},$$

ein Ausdruck, der für das untere Zeichen imaginär wird. Wir haben daher

$$x = \pm\sqrt{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{m^2}{4}},$$

daher für unsere Punkte die Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm 0{,}6006 \cdot \frac{m}{4}, \\ y &= 0{,}236 \cdot \frac{m}{4}. \end{aligned}\right\} (R \text{ und } R')$$

Aehnliche Rollcurven wie die hier beschriebene erzeugen alle Punkte K, für welche z positiv ist; wir halten es für unnöthig, hier noch mehr specielle Fälle dieser Art zu discutiren.

III.

Eine Curvenschar etwas anderer Art erhält man, wenn man dem z negative Werthe gibt, d. h. wenn man die Curve solcher Punkte untersucht, welche im Innern der rollenden Parabel liegen. Da bietet sich zunächst dar der Brennpunkt der Parabel.

Für ihn haben wir $z = -\frac{m}{4}$ und es gestaltet sich die Hauptgleichung in folgender Weise um:

$$\left[x^2+y^2-\left(\frac{m}{4}\right)^2\right]\left(y-\frac{m}{4}\right)+\frac{m}{2}x^2=o,$$

$$x^2\left(y+\frac{m}{4}\right)=-\left[y^2-\left(\frac{m}{4}\right)^2\right]\left(y-\frac{m}{4}\right),$$

$$x^2\left(y+\frac{m}{4}\right)=-\left(y^2-\frac{m}{4}\right)^2\left(y+\frac{m}{4}\right),$$

hieraus folgt

$$y+\frac{m}{4}=o;$$

die andere Lösung $x^2=-\left[y-\frac{m}{4}\right]^2$ hat offenbar keinen Sinn, da die eine Seite der Gleichung wesentlich positiv, die andere wesentlich negativ ist, während die erste, die wir auch schreiben können unter der Form

$$y=-\frac{m}{4},$$

die Gleichung der durch den Brennpunkt der rollenden Parabel erzeugten geraden Linie ist, auf deren Zustandekommen die ganze Untersuchung gegründet war.

IV.

Es soll noch die Rollcurve des Punktes J im Innern der Parabel, für welche $z=-\frac{m}{2}$ zu setzen ist, einer Untersuchung unterworfen werden. Ihre Hauptgleichung ist

$$\left[x^2+y^2-\frac{m^2}{4}\right]\left(y-\frac{m}{2}\right)+\frac{m}{2}x^2=o.$$

Im Punkte $x=o;\ y=-\frac{m}{2}$ ist $\frac{dy}{dx}=o,\ \frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{1}{m}$, was uns zeigt, dass die (übrigens ebenfalls symmetrische) Curve hier unter convexer Krümmung eine horizontale Tangente besitzt.

Zu $x=\infty$ gehört $y=o$, daher ist die Abscissenaxe Asymptote.

Liegt ferner die Parabel so, dass ihre Axe mit der Brennpunktslinie zusammenfällt, die Lage des Scheitels also durch den Schnittpunkt der Cissoide mit dieser Linie angegeben wird, wofür, wie wir wissen

$$x=\pm\frac{m}{4}$$

ist, so befindet sich offenbar unser Punkt J ebenfalls in der Brennpunktslininie und hat die Abscissen

$$x=\pm\frac{3}{4}m,$$

was auch mit Gleichung (5) des §. 2 übereinstimmt. Für diese Punkte ist nun

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2m}.$$

Wir entwerfen uns daher von unserer Curve folgendes Bild: Sie beginnt im Punkt

$$\left.\begin{aligned}x&=o,\\ y&=-\frac{m}{2},\end{aligned}\right\}\ (J)$$

in zwei symmetrischen Zweigen mit convexer Krümmung, durchschneidet, nachdem sie sich gewendet, die Brennpunktslinie in den Punkten

$$x = \pm\frac{3}{4}m, \Big\} (L \text{ und } L')$$

und wendet sich gegen die Abscissenaxe, die sie im Unendlichen erreicht.

Einen ähnlichen Verlauf zeigen alle Curven für Punkte, deren z negativ und dem absoluten Werth nach $> \frac{m}{4}$ ist.

V.

Wenn wir dagegen schliesslich eine Curve, für welche z negativ ist und dem absoluten Werth nach zwischen o und $\frac{m}{4}$ liegt, etwa $\nu N \nu'$, die aus der Annahme $z = -\frac{m}{8}$ hervorgeht, ins Auge fassen, so lehrt die Betrachtung des ersten Differentialquotienten, welcher für den Punkt

$$\left.\begin{aligned} x &= o, \\ y &= -\frac{m}{8}, \end{aligned}\right\} (N)$$

zu o wird und des zweiten, welcher für diese Werthe $= -\frac{8}{m}$ wird, dass die Curve hier unter concaver Krümmung eine horizontale Tangente besitzt. Sie durchschneidet die Brennpunktslinie unter den Abscissen

$$x = \pm\frac{m}{2}, \Big\} (Q \text{ und } Q')$$

mit convexer Krümmung, wie die Betrachtung des zweiten Differentialquotienten lehrt, und wendet sich gegen ihre Asymptote, die im Abstand $y = -\frac{3}{8}m$ mit der Abscissenaxe parallel lauft.

Wir fassen die Ergebnisse unserer Untersuchung in folgende Sätze zusammen:

Die Ellipse dreht sich an der gefundenen Grundcurve unzähligemal herum, während die Umdrehung der Hyperbel und Parabel nur eine einmalige ist. Bei den letzteren findet der Unterschied statt, dass die Axe der Hyperbel sich um einen Winkel von 360^0, vermindert um den Asymptotenwinkel, herumbewegt, die Parabelaxe dagegen volle 360^0 beschreibt.

Die Rollcurven der Ellipse sind demnach sich stets wiederholende Linien von cycloidischer Gestalt, die der Hyperbel und Parabel symmetrische, nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufende Curven.

Als specieller Fall tritt in jeder der drei Curvenscharen die von dem (einen) Brennpunkt erzeugte gerade Linie auf, von welcher unsere Untersuchung ihren Ausgang genommen hat.

Die nothwendigen Berichtigungen findet man auf der Innenseite des Umschlags.

Druck von Friedr. Scheel in Cassel.

Fig. 1.

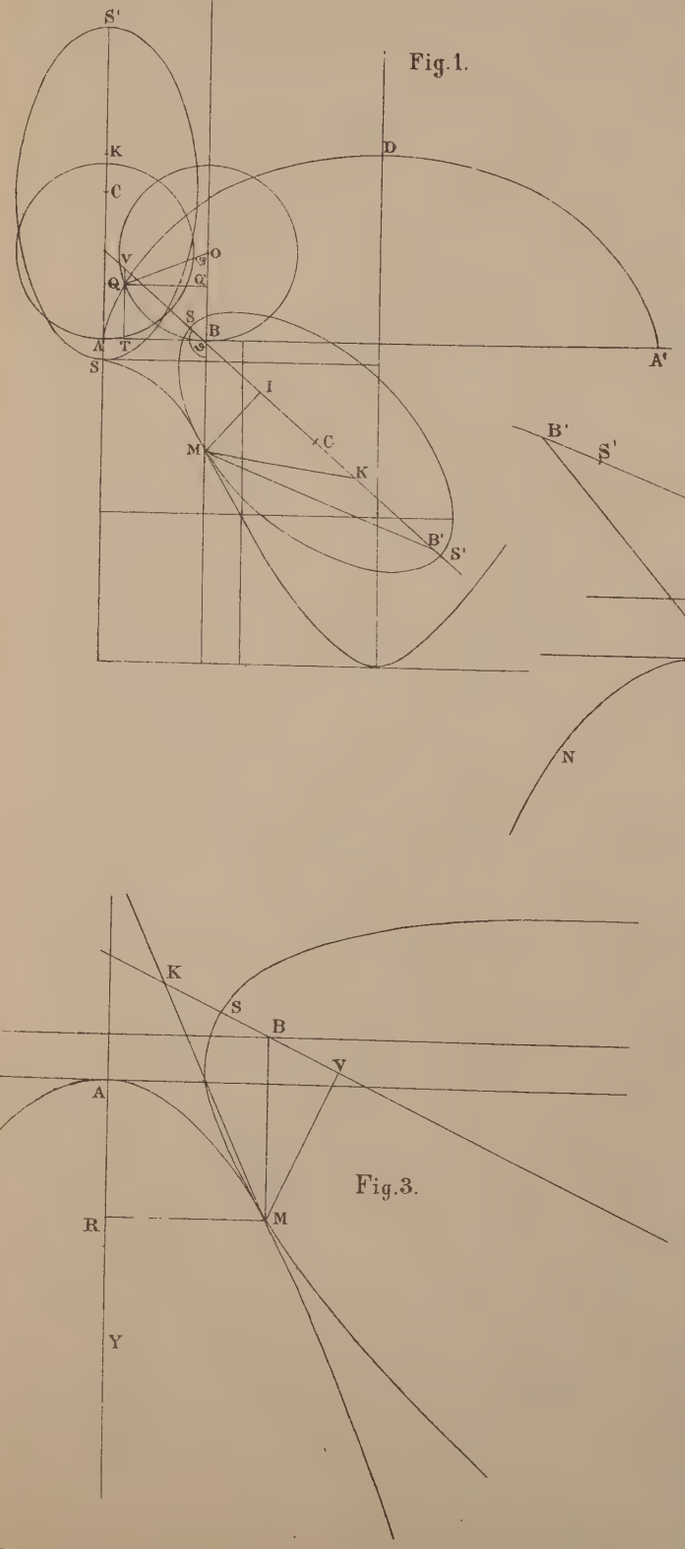


Fig. 4.

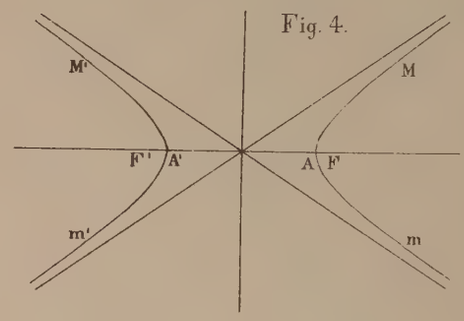


Fig. 2.

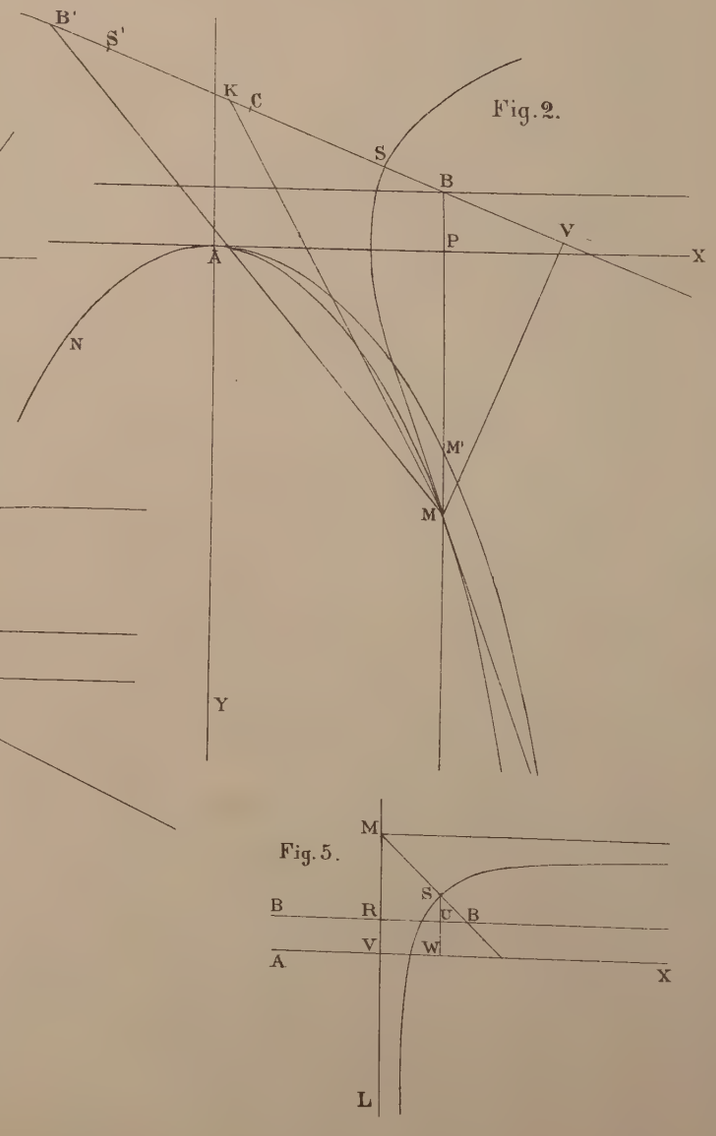
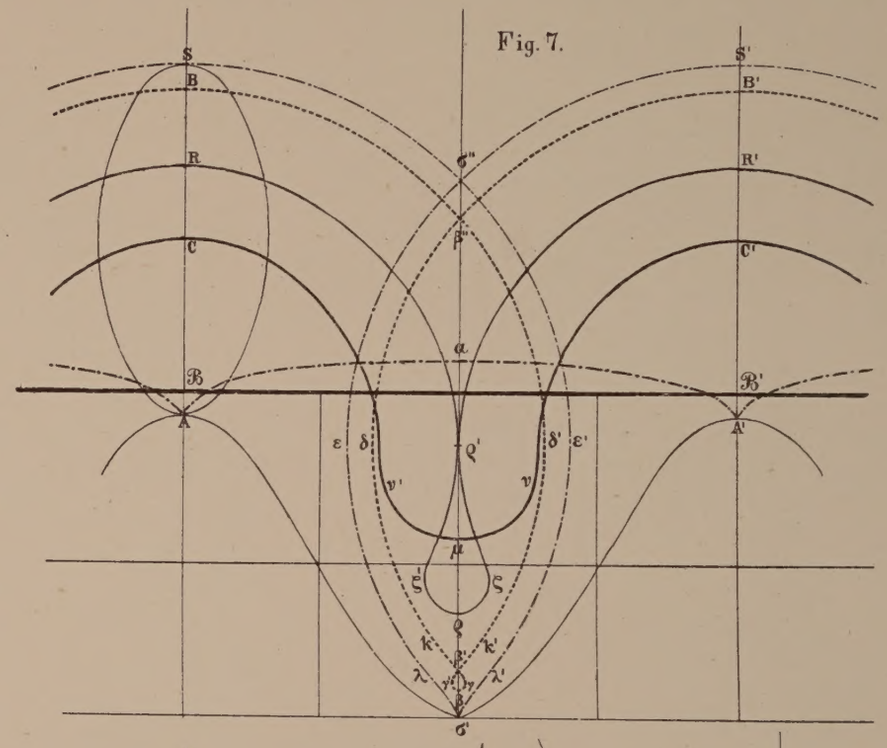


Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 7.



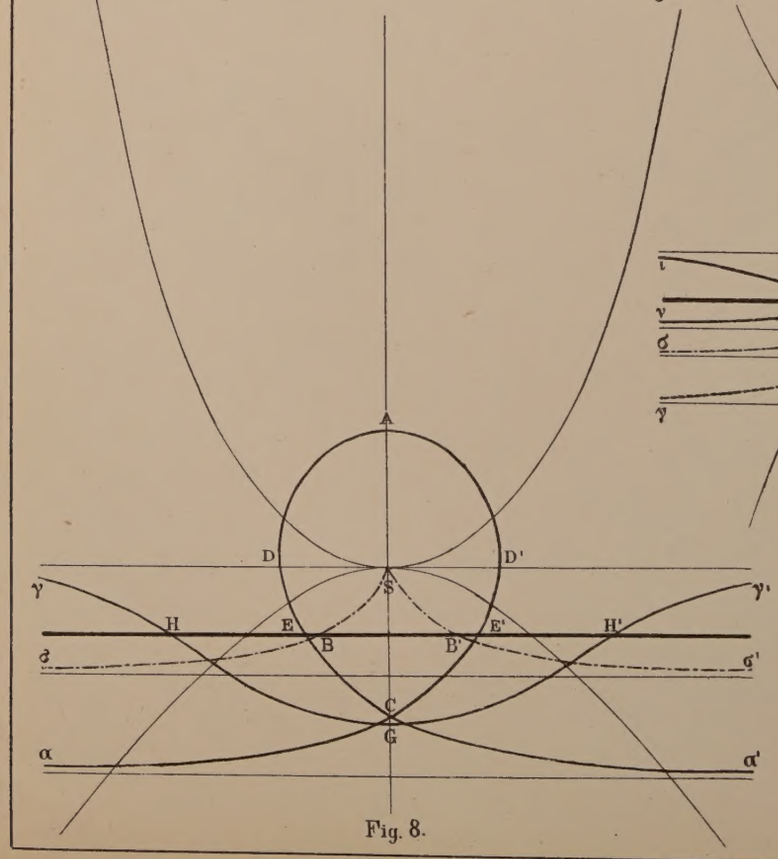
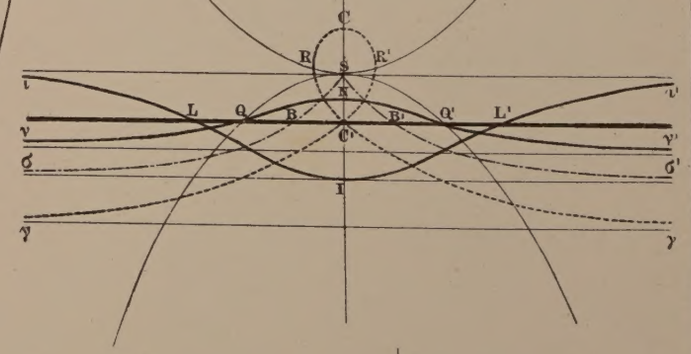


Fig. 8.

Fig. 9.



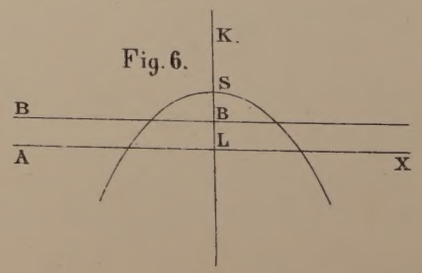


Fig. 6.

Berichtigungen.

Seite 8 neben Z. 5 v. u. lies Fig. 1.

„ 16 Z. 15 v. o. lies γ' statt γ,

„ 22 Z. 6 v. o. lies AY statt Ay

„ 30 Z 8 v. o. muss es heissen

$$-\frac{2(y+z)+m+4x\frac{dy}{dx}+(6y+2z)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2(y+z)y+x^2+y^2-z^2}.$$

ebenda Z. 11 v. o. muss es heissen

$$-\frac{z+\frac{m}{4}}{z^2}.$$